Integrali Impropri e Taylor II

Manuela Grella & Simona Giovannetti

6 giugno 2005

Soluzione 1. (i) Sfruttiamo le proprietà del logaritmo:

$$(1+x^3)^{\frac{1}{x^2\sin(2x)}} = e^{\frac{\ln(1+x^3)}{x^2\sin(2x)}}$$

Possiamo, allora, portare il limite all'esponente. Applichiamo Taylor a quest'ultimo limite:

$$\ln(1+x^3) = x^3 + o(x^3), \qquad x^2\sin(2x) = x^2(2x+o(x)) = 2x^3 + o(x^3)$$

Sfruttando ciò si ha che:

$$\lim_{x\to 0}(1+x^3)^{\frac{1}{x^2\sin(2x)}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)}{x^2\sin(2x)}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^3)}{2x^3+o(x^3)}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Una soluzione alternativa è sviluppare solamente il seno all'esponente e notare che il limite ottenuto, ossia $\lim_{x\to 0}(1+x^3)^{\frac{1}{2x^3+o(x^3)}}$, è un limite notevole che dà $\sqrt{e}$.

(ii) Sviluppiamo le funzioni principali del limite, considerando che al denominatore c'è x^2:

$$\sin^2\sqrt{x} = (\sqrt{x} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3!} + o(x^2))^2 = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\sin^2 x = (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4))^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) = x^2 + o(x^3)$$

Andando a sostituire il tutto nel limite si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin^2\sqrt{x} - \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x - x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{6} - x^2 + o(x^3)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{3}x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2} = -\frac{2}{3}$$

(iii) Sviluppiamo le funzioni principali del limite iniziando dal denominatore: applicando la formula dello sviluppo di Taylor, (lasciando il calcolo delle derivate al lettore) si ha che:

$$\sqrt{1+2x^4} = 1 + x^4 + o(x^4)$$

Quindi, scriviamo lo sviluppo delle funzioni al numeratore fino al quarto ordine:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + x^4 + o(x^4)$$

$$\ln(1 + x \arctan x) = \ln(1 + x(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4))) = \ln(1 + x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)) =$$

$$= x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$$

Andando a sostituire il tutto nel limite si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - \ln(1 + x \arctan x)}{\sqrt{1 + 2x^4} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{4}{3}$$

(iv) Sfruttiamo le proprietà del logaritmo:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$$

Sfruttiamo ora la formula di Taylor per risolvere il limite all'esponente:

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln\left(\frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

Da ciò $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(-\frac{x^2}{6} + o(x^2)) = 0$ Per cui:

$$e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = e^0 = 1$$

(v) Sviluppiamo le funzioni principali del limite iniziando dal numeratore:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Quindi, al numeratore si ha $x^3(e^x - \cos x) = x^3(x + x^2 + o(x^2)) = x^4 + x^5 + o(x^5)$; vediamo ora il denominatore:

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

Andando a sostituire il tutto nel limite si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3(e^x - \cos x)}{x^2 - \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + x^5 + o(x^5)}{x^2 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)} = 3$$

Soluzione 2. (i) $18°$ corrisponde a $\frac{\pi}{10}$. Considerando lo sviluppo di Taylor col resto di Lagrange in un punto a, l'errore è dato dalla seguente formula:

$$E = |f(x) - P^n(x)| = |\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi)|$$

dove $P^n(x)$ è il polinomio dello sviluppo di Taylor fino all'ordine n-esimo, e $0 < \xi < x$.
In questo caso, considerando lo sviluppo in un intorno di 0, il resto di Lagrange del coseno ha la seguente forma:

$$\left| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi) \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1} \sin \xi}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right|$$

Quello che si deve fare è cercare il più piccolo n per cui la disuguaglianza $E \leq \frac{1}{1000}$ è verificata; maggioriamo, quindi, l'espressione dell'errore in modo da eliminare la ξ e calcoliamo questa espressione per $x = \frac{\pi}{10}$:

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} \sin \xi}{(2n+2)!} (\frac{\pi}{10})^{2n+2} \right| \leq \frac{(\frac{\pi}{10})^{2n+2}}{(2n+2)!} < \frac{1}{1000}$$

Facendo i conti si verifica che questo è vero per $n = 2$, ossia lo sviluppo di Taylor deve considerare i primi due termini: $\cos 18° = 1 - \frac{\pi^2}{200}$

(ii) $\sqrt[3]{7}$ si ottiene dalla funzione $f(x) = \sqrt[3]{8+x}\ perx = -1$. Al contrario del precedente esercizio, qui non si riesce a trovare una formula esplicita per il resto dello sviluppo di Taylor, per cui bisogna calcolarlo a mano, ossia fermarsi ad ogni passo e verificare se l'errore è inferiore a 0.01: la funzione $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$ ha $f'(x) = \frac{1}{3}(8+x)^{-\frac{2}{3}}$ e $f''(x) = -\frac{2}{9}(8+x)^{-\frac{5}{3}}$; per cui volendo si fermare al primo ordine lo sviluppo di Taylor in 0 è:

$$\sqrt[3]{8+x} = 2 + \frac{1}{3} 8^{-\frac{2}{3}} x - \frac{1}{9}(8+\xi)^{-\frac{5}{3}} x^2$$

dove $-1 < \xi < 0$. Maggiorando il resto e calcolandolo in $x = -1$ si ha:

$$\left| -\frac{1}{9}(8+\xi)^{-\frac{5}{3}} x^2 \right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{7^5}} \simeq 0.039 > 0.01$$

quindi non va bene e bisogna continuare con un ordine maggiore! Proseguendo si ha che:

$$\sqrt[3]{8+x} = 2 + \frac{1}{3} 8^{-\frac{2}{3}} x - \frac{1}{9}(8)^{-\frac{5}{3}} x^2 + \frac{5}{81}(8+\xi)^{-\frac{8}{3}} x^3$$

Maggiorando il resto e calcolandolo in $x = -1$ si ha:

$$\left| \frac{5}{81}(8+\xi)^{-\frac{8}{3}} \right| \leq \frac{5}{81} 7^{-\frac{8}{3}} \simeq 0.00034 < 0.01$$

per cui ci si ferma al terzo ordine, e si avrà che $\sqrt[3]{7} = 2 - \frac{1}{3} 8^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{9} 8^{-\frac{5}{3}} \simeq 1.92$

Soluzione 3. (i) La funzione integranda $f(x)$ è continua in $(0,2]$ e illimitata in $x=0$. Scrivendo lo sviluppo di Taylor per $x \to 0^+$ si ha:

$$\cos(3x) - 3\cos x = -2 - 3x^2 + o(x^3) \qquad e^{x^2+x^3} = 1 + (x^2+x^3) + o(x^3)$$

Da ciò si ha:

$$\cos(3x) - 3\cos x + 3e^{x^2+x^3} - 1 = 3x^3 + o(x^3)$$

In conclusione otteniamo:

$$\left(\frac{\cos(3x) - 3\cos x + e^{x^2+x^3} - 1}{x^5 + 3x^6}\right)^{\frac{1}{5}} \sim \left(\frac{3x^3}{x^5}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{3^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{2}{5}}}$$

questo per $x \to 0^+$.
Per il teorema del confronto, poiché l'integrale $\int_0^2 \frac{\sqrt[5]{3}}{x^{\frac{2}{5}}}dx$ converge in $(0,2]$, allora anche l'integrale dato converge lì.

(ii) La funzione integranda è continua in $[2,+\infty)$, infinitesima per $x \to +\infty$ e positiva.
Sviluppando in serie di Taylor col resto di Peano $\sin\frac{1}{x^2}$ si ha:

$$\sin\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3!x^6} + o(\frac{1}{x^6}) \quad per \quad x \to +\infty$$

Per cui:

$$\frac{1}{x^2} - \sin\frac{1}{x^2} = \frac{1}{6x^6} + o(\frac{1}{x^6})$$

Per il teorema del confronto, poiché l'integrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^6}dx$ è convergente in $[2,+\infty)$, allora qui è convergente anche l'integrale dato.