Soluzioni tutorato1

Manuela Grella e Simona Giovannetti

23 marzo 2005

Soluzione 1. (i) Per le proprietà del logaritmo abbiamo che $\ln(1+\frac{1}{x}) = \ln(\frac{x+1}{x}) = \ln(x+1) - \ln x$. Applico il teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = \ln x$ nell'intervallo $[x, x+1]$, quindi $\exists\ \xi \in (x, x+1)$ tale che

$$\ln(x+1) - \ln(x) = f'(x)(x+1-x) = \frac{1}{\xi}$$

Poiché $x < \xi < x+1$ allora abbiamo che

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{\xi} = \ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$$

(ii) Applico Lagrange a $f(x) = x + \sin x - 2(e^x - 1)$, con $\xi \in [0, x)$; ottengo che $x + \sin x - 2(e^x - 1) = f'(\xi)x$: poiché ho che $f'(x) = 1 + \cos x - 2e^x$, maggiorando $\cos x$ con 1 si ha:

$$x + \sin x - 2(e^x - 1) = (1 + \cos(\xi) - 2e^\xi) \leq (1 + 1 - 2e^\xi) \leq 2 - 2e^\xi \leq 0$$

(iii)Applico Lagrange a $f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$ con $\xi \in [0, x)$ e $x \leq \frac{\pi}{2}$. Poiché $f'(x) = \frac{1}{\cos^2} - 1 - x^2$ abbiamo che

$$\tan x - x - \frac{x^3}{3} = f'(\xi)x = x(\frac{1}{\cos^2\xi} - 1 - \xi^2)$$

Poiché $x > 0$ non contribuisce allo studio della disuguaglianza, quindi basta dimostrare che $\frac{1}{cos^2\xi} - 1 - \xi^2 \geq 0$: minorando $-\xi^2$ per $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$ (dal momento che $x < \frac{\pi}{2}$), si ha che $\frac{1}{cos^2\xi} - 1 - \xi^2 \geq \frac{1}{cos^2\xi} - 1 - \frac{\pi^2}{4}$, quindi quello che dobbiamo dimostrare è che $\frac{1}{cos^2\xi} \geq 1 + \frac{\pi^2}{4}$, ma questo è vero perché $\cos^2\xi \leq \frac{1}{1+\frac{\pi^2}{4}}$ dal momento che $\cos^2\xi \simeq \epsilon$ per c che tende a $\frac{\pi}{2}$.

Soluzione 2. Applico Lagrange alla funzione $h(x) = f(x) - g(x) \ \in [a, x)$: otteniamo

$$h(x) - h(a) = h(\xi)(x-a) \quad \xi \in (a, x)$$

E quindi abbiamo:

$$f(x) - g(x) - f(a) + g(a) = [f'(\xi) - g'(\xi)](x-a)$$

dove $-f(a)+g(a)<0$ e $f'(\xi)-g'(\xi)>0$, quindi:

$$f(x)-g(x)=[f(a)-g(a)]+[f'(\xi)-g'(\xi)](x-a)>0$$

Soluzione 3. (i) $f(x)=|x^3-1|$.
Studiamo la funzione x^3-1 poi ribaltiamo la parte negativa.

Il **dominio** è tutto $\mathbf{R}$; per il **segno** abbiamo che

$$f(x)\geq 0 <=> \ x^3-1\geq 0 \ <=> x^3\geq 1 \ <=> x\geq 1$$

I **limiti** sono $\lim_{x\to+\infty} x^3-1=+\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} x^3-1=-\infty$.

Gli **asintoti**: non ci sono asintoti verticali o orizzontali; verifichiamo gli asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-1}{x}=+\infty \quad e \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x}=+\infty$$

quindi non ci sono neanche gli asintoti obliqui.

La **derivata prima** è $f'(x)=3x^2$, quindi $f'(x)=0 <=> x=0$ e $f'(x)>0\ \forall x\neq 0$.

La **derivata seconda** è $f''(x)=6x$, quindi $f''(x)=0 <=> x=0$ e $f''(x)>0$ per $x>0$ e $f''(x)<0$ per $x<0$.

La funzione non è derivabile in 1.

(ii) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}}$
Il **dominio** deve essere tale che $x+1\neq 0$ ed inoltre $\frac{x^2(x-1)}{x+1}\geq 0$, quindi studiando le disuguaglianze otteniamo che il dominio D è pari a $(-\infty,-1)\cup\{0\}\cup[1,+\infty)$. Il **segno** di $f(x)$ è $>0\ \forall x\in D$ e $f(x)=0$ per $x=0$ e per $x=1$.

I **limiti** sono

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to-1^-}\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}}=+\infty \quad e \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

Gli **asintoti**: non ci sono asintoti orizzontali, ma c'è un asintoto verticale in -1. Vediamo ora gli asintoti obliqui:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x^2(x+1)}}=1$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2(x-1)} - x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(x-1) - x^2(x+1)}{(\sqrt{x^2(x-1)} + x\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{\sqrt{x^2(x^2-1)} + x(x+1)} = -1$$

quindi abbiamo l'asintoto obliquo con retta $y = x - 1$ per $x \to +\infty$.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = -1$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(x-1)} + x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(x-1) - x^2(x+1)}{(\sqrt{x^2(x-1)} - x\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^2}{-(x\sqrt{(x^2-1)} + x(x+1))} = 1$$

quindi abbiamo l'asintoto obliquo con retta $y = 1 - x$ per $x \to -\infty$.

La **derivata prima** è $f'(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2(x-1)}}\frac{x(x^2+x-1)}{(x+1)^2}$: essa si annulla per $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (che però non appartiene al dominio della funzione) e per $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; studiando il segno della derivata abbiamo che per $x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $f'(x) < 0$, quindi è decrescente, mentre nel resto del dominio $f'(x) > 0$, quindi la funzione è crescente. Da ciò possiamo dedurre che $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ è un punto di minimo.
In 1 però, la derivata non esiste, pertanto studiamo il limite:

$$\lim_{x\to1^+} \sqrt{\frac{x+1}{x^2(x-1)}}\frac{x(x^2+x-1)}{(x+1)^2} = +\infty$$

quindi la funzione $f(x)$ ha tangenza verticale in 1.
Prescindiamo lo studio della derivata seconda.