Soluzioni tutorato1

Manuela Grella e Simona Giovannetti

7 aprile 2005

Ricordiamo la definizione di uniforme continuitá: data $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ é uniformemente continua se$\forall\epsilon\exists\delta(\epsilon) t.c. \forall x, y \in [a, b] t.c. |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

Questi sono alcuni criteri per stabilire se una funzione é uniformemente continua: (i)se f(x) é uniformemente continua su tutto l'intervallo e possiede un asintoto orizzontale allora f(x) é u.c..
(ii)se f(x) é continua su un compatto allora é u.c.
(iii)se f(x),definita in un intervallo aperto, é estendibile ad una funzione continua nell'intervallo chiuso,allora é u.c.
(iv) se f(x) non é estendibile ad una funzione continua su un compatto non é u.c.

(v)se f(x) ha derivata limitata é u.c.
(vi) se f(x) é lipschitziana é u.c.

Sono utili anche i seguenti lemmi:
(i)(Lemma della farfalla)Se $f(x) : [a, \infty] \rightarrow \mathbf{R}$ é u.c.allora$\exists A, B t.c. |f(x)| \leq Ax + B$. (Si usa in negativo,cioé per dimostrare che una funzione non é u.c.)

(ii)Se f(x) é u.c. in un intervallo I limitato allora f(x) é limitata in I.

Esercizio 1. La funzione é definita $\forall x \neq 0$ e,tenendo conto del modulo, si puó definire in questo modo:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}(logx + 1) & \text{se } x > 0 \\ e^{-x}(log(-x) - 1) & \text{se } x < 0 \\ \end{cases}$$

Cominciamo a studiare la funzione per $x > 0$.
Il **segno** della funzione è determinato da $(logx + 1)$, dal momento che e^{-x} è sempre positivo, quindi si ha:

$$e^{-x}(logx + 1) > 0 \Longleftrightarrow \log x > -1 \Longleftrightarrow x > \frac{1}{e}$$

e per $x = \frac{1}{e}$ la funzione si annulla.
Studiamo ora i **limiti**:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-x}(\log x + 1) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} e^{-x}(\log x + 1) = 0$$

per cui si ha un **asintoto verticale** destro ($x = 0$) in 0 e un **asintoto orizzontale** (y=0).
Studiamo ora la **derivata prima**: $f'(x) = e^{-x}(\frac{1}{x} - \log x - 1)$.
Essa è definita $\forall\ x > 0$. Poiché e^{-x} è sempre positiva, per analizzarne il segno consideriamo la funzione

$$g(x) = \frac{1}{x} - \log x - 1$$

Studiamone la derivata prima: $g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}(1 + x)$ che è sempre negativa per $x > 0$, quindi $g(x)$ è sempre decrescente; dato che $g(1) = 0$, la funzione $g(x)$ è positiva in $(0, 1)$ e negativa per $x > 1$, perciò anche $f'(x)$ è positiva in $(0, 1)$ e negativa per $x > 1$: pertanto $f(x)$ è crescente in $(0, 1)$ e decrescente in $(1, +\infty)$; inoltre il punto $x = 1$ è un punto di **massimo relativo**, e $f(1) = \frac{1}{e}$.

Studiamo ora la funzione per $x < 0$, quindi $f(x) = e^{-x}(\log(-x) - 1)$
Per il **segno** della funzione, poiché e^{-x} è sempre positivo allora si ha:

$$f(x) > 0 \iff \log(-x) - 1 > 0 \iff \log(-x) > 1 \iff x < -e$$

Inoltre $f(-e) = 0$. Studiamo ora i **limiti**:

$$\lim_{x\to 0^-} e^{-x}(\log(-x) - 1) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -\infty} e^{-x}(\log(-x) - 1) = -\infty$$

quindi abbiamo un **asintoto vertivale** sinistro ($x = 0$) in 0. Inoltre la funzione non ha **asintoti obliqui** a $-\infty$ poiché

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{-x}(\log(-x) - 1)}{x} = -\infty$$

.
Studiamo la **derivata prima**: $f'(x) = -e^{-x}(\log(-x) - 1) + e^{-x}(\frac{1}{x}) = e^{-x}(\frac{1}{x} - \log(-x) + 1)$.
Poiché e^{-x} è sempre positivo, per studiare il segno della derivata prima studiamo il segno della funzione:

$$h(x) = \frac{1}{x} - \log(-x) + 1$$

Consideriamo la sua derivata: $h'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}(1 + x)$, che si annulla per $x = -1$, e quindi qui si annulla anche la $f'(x)$.

$h'(x) > 0$ in $(-\infty, -1)$ e < 0 in $(-1, 0)$, quindi -1 è un punto di massimo per $h(x)$ e $h(-1) = 0$, per cui $h(x) < 0 \ \forall \ x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$. Quindi $f'(x) = 0$ per $x = -1$ ed è negativa in tutti gli altri punti dell'intervallo considerato, pertanto $f(x)$ è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e ha un **punto di flesso orizzontale** in -1 dove $f(-1) = -e$.

Esercizio 2. Si noti che la funzione é periodica di 2π,quindi ci limitiamo a studiarla nell'intervallo $[0, 2\pi]$;in particolare si tratta anche di una funzione dispari(perché lo sono $senx$ e $tanx$),quindi ci potremmo anche ridurre all'intervallo $[0, \pi]$. La funzione in $[0, 2\pi]$ é definita $\forall x \neq \pi/2, 3\pi/2$;é positiva in $[0, 2\pi]$ e in $[\pi, 3\pi/2]$ e negativa nei restanti intervalli.
Per i limiti si ha: $\lim_{\to \pi/2^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{\to 3\pi/2^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{\to 3\pi/2^-} f(x) = \infty$; $\lim_{\to \pi/2^-} f(x) = \infty$.
La derivata prima é $f^{'}(x) = cosx + 1/cosx^2$; essa si annulla in $x = \pi$ e $f^{'}(x) > 0 \ \forall x \neq \pi$;quindi per $x = \pi$,dove si ha $f(x) = 0$, ho un flesso a tangente orizzontale.
La derivata seconda é $f^{''}(x) = \frac{senx}{cosx} \frac{-cosx^3+2}{cosx^2}$,essa é positiva in $[0, \pi/2]$ e in $[\pi, 3\pi/2]$,dove la funzione é convessa,e negativa nei rimanenti intervalli dove la funzione é concava.

Esercizio 3. Sia dapprima $\alpha \leq 1$; posto $1 \leq x \leq y$, si ha $\frac{y}{x} \geq 1$, da cui $\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha \leq \frac{y}{x}$; perciò:

$$y^\alpha - x^\alpha = x^\alpha \left[\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha - 1 \right] \leq x^\alpha \left[\left(\frac{y}{x}\right) - 1 \right]$$

cioè $y^\alpha - x^\alpha \leq x^{\alpha-1}(y - x)$; ma il fattore $x^{\alpha-1}$ è ≤ 1, perché $x \geq 1$ e l'esponente $\alpha - 1 \leq 0$: ne segue che per $1 \leq x \leq y$ vale

$$f(y) - f(x) = y^\alpha - x^\alpha \leq y - x$$

cioè $|f(y) - f(x)| \leq |y - x|$, disuguaglianza valida comunque si prendano x ed y in $[1, +\infty)$, dato che x ed y sono ovviamente interscambiabili.

Da ciò segue l'uniforme continuità di f, perché fissato $\epsilon > 0$, si può prendere come δ un qualunque numero minore di ϵ, ad esempio $\delta = \frac{\epsilon}{2}$: per $|y - x| < \delta$ si ha $|f(y) - f(x)| \leq \delta < \epsilon$.

Esercizio 4. (i)f(x) é u.c. perché $f^{'}(x) = \frac{-senx}{(cosx+2)^2}$ e $|f^{'}(x)| \leq 1$;
(ii)$f(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$ non é u.c. perché se consideriamo l'intervallo limitato (0,1) essa non é limitata;infatti $\lim_{\to 0^+} f(x) = -\infty$.
(iii)f(x) é u.c. perché $f^{'}(x) = cos(1/x)(-1/x^2)$ e $|f^{'}(x)| \leq \pi^2$
(iv)f(x) é u.c. su tutto **R** perché é continua ed ha un asintoto orizzontale infatti il limite a + e - ∞ valgono 1.
(v)f(x) é u.c. nell'intervallo $[3, \infty]$ perché $f^{'}(x) = \frac{x^4 - 12x^2 - 2x}{(x^2-4)^2}$ e $\lim_{\to \infty} f^{'}(x) = 1$; invece in $(-\infty, -2)$ f(x) non é u.c. perché non é u.c. nell'intervallo limitato $[-3, -2)$;infatti $\lim_{\to -2^-} f(x) = -\infty$