Integrali Impropri

Manuela Grella & Simona Giovannetti

4 maggio 2005

Teorema 1. **(criterio del confronto)** Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue e positive in $[a,b)$ e illimitate in b. Se risulta $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b)$, allora:

1) la convergenza di $\int_a^b g(x)dx$ implica la convergenza di $\int_a^b f(x)dx$.

2) la divergenza di $\int_a^b f(x)dx$ implica la divergenza di $\int_a^b g(x)dx$.

Teorema 2. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue e positive in $[a,b)$, illimitate in b con $g(x) \neq 0$ in ogni punto in un certo intorno di b. Se risulta $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l > 0$, allora i due integrali $\int_a^b f(x)dx$ e $\int_a^b g(x)dx$ sono entrambi convergenti oppure entrambi divergenti, ossia hanno lo stesso comportamento.
Se $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ si pó dire solo che se converge l'integrale $\int_a^b g(x)dx$ allora converge anche l'integrale $\int_a^b f(x)dx$, e se diverge l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ allora diverge anche l'integrale $\int_a^b g(x)dx$.

Naturalmente questi teoremi si possono estendere al caso in cui la funzione è illimitata in a.
Questi criteri consentono di avere delle informazioni sul comportamento di un integrale improprio dal confronto con altri integrali il cui andamento è noto. Le funzioni pi utilizzate per il confronto sono:

1) $g(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$ se $f(x)$ è illimitata in b;

2) $g(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ se $f(x)$ è illimitata in a.

Gli integrali di queste funzioni sono convergenti per $0 < \alpha < 1$ e divergenti per $\alpha \geq 1$.

Teorema 3. (criterio del confronto) Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue e positive in $[a,+\infty)$ e infinitesime per $x \to +\infty$. Se per $x \geq b$, con $b \geq a$ risulta $f(x) \leq g(x)$, allora:

1) la convergenza di $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ implica la convergenza di $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

2) la divergenza di $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ implica la divergenza di $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Analogamente si enuncia il teorema per intervalli del tipo $(-\infty, b]$.

Nella paratica è utile fissare come funzioni di riferimento le funzioni già note:

1) $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ se $f(x)$ è definita in un intervallo del tipo $[a,+\infty)$, con $a > 0$.
2) $g(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$ se $f(x)$ è definita in un intervallo del tipo $(-\infty, b]$, con $b < 0$.

Gli integrali di queste funzioni sono convergenti per $\alpha > 1$ e divergenti per $0 < \alpha \leq 1$.

Soluzione 1. (i)
Si tratta di una funzione del tipo $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha = \frac{1}{2}$,questa integrata tra $0e1$ dá luogo ad un integrale convergente che si puó calcolare; infatti $lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$

(ii)
Osserviamo che per $x \in [0,4]$ $\frac{x}{x^2-1} > \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$,ma l'integrale della funzione $\frac{1}{x}$ in tale intervallo é divergente,quindi diverge anche l'integrale di partenza per il teorema del confronto.

(iii)
Proviamo a calcolare $\lim_{c\to 1^-} \int_c^{e^{-2}} \frac{1}{x\sqrt{ln(\frac{1}{x})}}dx$; effettuando la sostituzione $\frac{1}{x} = t$,otteniamo $\lim_{c\to 1^-}(-2\sqrt{ln(\frac{1}{x})} + 2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$,poiché abbiamo ottenuto un limite finito l'integrale dato é convergente.

(iv) La funzione integranda è positiva e illimitata in $x = 4$. Preso un punto c con $0 < c < 4$, si calcola l'integrale definito $I_c = \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$. Questo integrale si risolve ponendo $x = \sqrt{16}\sin t$, dalla quale si ricava che $x = 4\sin t,\ t = \arcsin\frac{x}{4}$ e $dx = 4\cos tdt$; inoltre osservando che per $x = 0$ si ha $t = 0$ e che per $x = c$ si ha $t = \arcsin \frac{c}{4}$

(v) Si risolve l'integrale con la sostituzione $t = \ln x$ dalla quale si ottiene che $dt = \frac{1}{x}dx$ e per $x = e^4$ $t = 4$ e per $x \to +\infty$ $\ln(+\infty) = +\infty = t$, quindi l'integrale diventa:

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{t^2 - 5t + 6} dt$$

La funzione integranda è positiva e continua in $[4, +\infty)$ ed è infinitesima per $t \to +\infty$, essendo $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{t^2-5t+6} = 0$; quindi posto un punto $b > 4$, si calcola l'integrale $\int_4^b \frac{1}{t^2-5t+6}dt$ e in seguito il limite per $b \to +\infty$.

Svolgendo i conti si ha che:

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{t^2 - 5t + 6} dt = [-\ln|t-2| + \ln|t-3|]_4^b = \ln\left|\frac{b-3}{b-2}\right| - \ln\left|\frac{4-3}{4-2}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{b-3}{b-2}\right| - \ln\frac{1}{2}$$

Si ha pertanto:

$$\lim_{b\to+\infty} \int_4^{+\infty} \frac{1}{t^2 - 5t + 6} dt = \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = \ln 2$$

La funzione integranda è quindi integrabile in senso generalizzato in $[4, +\infty)$ ossia l'integrale generalizzato è convergente in $[e^4, +\infty)$.

Soluzione 2. (i) La funzione integranda $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^5+x^3}}$ è positiva e continua in $(0, 1]$ ed è illimitata in $x = 0$. Inoltre si ha che:

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^5 + x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}\sqrt{x^2 + 1}}$$

Sostituendo all'interno della radice nell'ultimo membro il massimo valore assunto da x nell'intervallo $(0, 1]$, ossia 1, si ottiene $\frac{1}{x^{\frac{7}{6}}\sqrt{x^2+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}x^{\frac{7}{6}}}$.
Essendo quindi $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^5+x^3}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}x^{\frac{7}{6}}} = g(x)$ e poiché l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}x^{\frac{7}{6}}}dx$ diverge in $(0, 1]$ (essendo $g(x)$ del tipo $\frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha = \frac{7}{6} > 1$), per il teorema del confronto si ha che l'integrale dato diverge.

(ii) La funzione integranda è continua in $[3, +\infty)$; si esegue la maggiorazione:

$$\frac{|\sin x|}{|\sqrt{x^5 - 4x^3}|} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3(x^2 - 4)}} = \frac{1}{x^{3/2}\sqrt{x^2 - 4}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$$

Per il criterio del confronto, poichè l'integrale $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ è convergente nell'intervallo dato, allora anche l'integrale $\int_3^{+\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x^5-4x^3}} dx$ è convergente, e quindi lo è anche l'integrale improprio iniziale.

(iii) La funzione integranda è positiva e continua in $[0, +\infty)$; si ha la maggiorazione:

$$\frac{e^x}{e^{2x}+x} \le \frac{e^x}{e^{2x}} = \frac{1}{e^x} \quad \forall x \in [0, +\infty)$$

Si determina ora se l'integrale generalizzato $l_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x} dx$ è convergente o meno. Si ha:

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \to +\infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b \to +\infty} [-e^{-b} - (-e^0)] = 1$$

Poiché l'integrale è convergente in $[0, +\infty)$ per il criterio del confronto anche l'integrale dato converge in $[0, +\infty)$.