

Rolle, Lagrange e Studio di Funzione

Manuela Grella e Simona Giovannetti

14 marzo 2005

Esercizio 1. Si dimostri la seguente generalizzazione del Teorema di Rolle: sia $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione derivabile tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a).$$

Allora esiste un punto $\xi \in (a, +\infty)$ tale che $f'(\xi) = 0$.

Esercizio 2. Dimostrare le seguenti disuguaglianze:

(i) $e^x \geq 1 + x$;

(ii) $\frac{x^2+1}{8} \geq \frac{x^2}{(x+1)^2}$;

(iii) $\frac{x+1}{\sqrt{x}} \geq 2$.

Esercizio 3. Disegnare il grafico della seguente funzione dopo aver semplificato l'espressione in base alle proprietà dei logaritmi e del valore assoluto:

$$f(x) = x + \ln |x| - \ln |x^3 - x|$$

Esercizio 4. Trovare massimi e minimi relativi delle seguenti funzioni:

(i) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$;

(ii) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.

Esercizi per casa

Esercizio 5. Trovare massimi e minimi relativi delle seguenti funzioni:

(i) $f(x) = \ln(\sqrt{x} - x)$.

Esercizio 6. Trovare massimi e minimi relativi ed assoluti delle seguenti funzioni:

(i) $f(x) = x + x^{2/3}$;

(ii) $f(x) = x \ln^2 x$;

(iii) $f(x) = \ln(\sin x)$;

(iv) $f(x) = |x + 3|$.

Esercizio 7. Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$$