11. ESERCIZI SULL' UNIFORME CONTINUITA'

Criteri e Teoremi:
· Se f é Lipschitziana in A, allora f é uniformemente continua (u.c.) in A;
· Se f é derivabile in A, ed ha derivata limitata, allora f é uniformemente continua (u.c.) in A;
· Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ continua in (a,b). Se

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l^+ \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = l^- \in \mathbb{R},$$

possiamo estendere f ad una funzione $\overline{f}$ u.c. in $[a,b]$, quindi f risulterá essere u.c. in (a,b). Precisamente:

$$\overline{f} = \begin{cases} f(x) & x \in (a,b) \\ l^+ & x = a \\ l^- & x = b \end{cases}$$

· Viceversa se f é continua in (a,b) ma uno dei due limiti $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to b^-} f(x)$ non esiste oppure é uguale a $\pm\infty$, la f non é u.c. in (a,b).

Teorema della farfalla: Sia $f[a,+\infty) \to \mathbb{R}$ u.c.. Allora esistono $A, B \in \mathbb{R}$: $|f(x)| \leq Ax + B$. $(*)$
Questo teorema ci dá un' informazione in *negativo*, infatti possiamo usarlo per provare che una data funzione non é u.c.., dimostrando che $(*)$ non vale.

Teorema dell' asintoto: Sia $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, allora f é u.c. in $[a,+\infty)$. (Si ha l' analogo per una funzione definita in $(-\infty, b]$, $(-\infty,+\infty)$.)
Osservazione Il viceversa non é vero! Esistono funzioni u.c. che non hanno asintoto orizzontale.

ESERCIZIO 1

Stabilire se le seguenti funzioni sono (u.c.) nei domini indicati:
(a) $f(x) = \log x$ in $[1, 2]$; $(0, 2]$; $(4, +\infty)$.
(b) $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ in $(-1, 0) \cup (0, 1)$; $(1, +\infty)$.
(c) $f(x) = \sin x$ in $\mathbb{R}$.
(d) $f(x) = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x^2+1}$ in $(1, 2)$, $[2, +\infty)$.
(e) $f(x) = x^3$ in $[a, +\infty)$.
(f) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ in $[a, +\infty)$.

ESERCIZIO 2

Provare che, se f é u.c. in $(a, b]$ e $[b, c)$, allora lo é anche in (a, c).

ESERCIZIO 3

Mostrare con esempi che il Teorema dell'uniforme continuitá non vale in un insieme
(i) illimitato,
(ii) non chiuso.