Esercizi sulle curve in forma parametrica

Esercizio 1. L'Elica Cilindrica.

Data la curva di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ \\ y(t) = a\sin t \qquad t \in [0, T],\ a > 0, b \in \mathbb{R} \\ \\ z(t) = bt \end{cases}$$

trovare: versore tangente, normale, binormale, vettore curvatura, raggio di curvatura, cerchio osculatore.
Ricordiamo che, data la parametrizzazione $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ della curva $\mathcal{C}$, si ha:

versore tangente $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\frac{df(t)}{dt}}{\left|\frac{df(t)}{dt}\right|}$,
versore normale $\mathbf{N}(t) = \dfrac{\frac{d\mathbf{T}(t)}{dt}}{\left|\frac{d\mathbf{T}(t)}{dt}\right|}$,
versore binormale: $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N}$,

vettore curvatura : $\mathbf{K}(t) = \dfrac{\frac{d\mathbf{T}(t)}{dt}}{\left|\frac{df(t)}{dt}\right|}$,
raggio di curvatura: $\rho = \frac{1}{|\mathbf{K}|}$ (é il raggio del cerchio osculatore),

centro del cerchio osculatore in $x_0 \in \mathcal{C}$: $c(x_0) = f(x_0) + \mathbf{N}\rho$.
Tornando alla curva data, che é un'elica cilindrica, troviamo i versori del triedro mobile:
versore tangente:

$$\frac{df(t)}{dt} = (-a\sin t, a\cos t, b) \quad , \left|\frac{df(t)}{dt}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

quindi:

$$\mathbf{T} = \left(\frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Versore normale:

$$\frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} = \left(\frac{-a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0 \right), \quad \left| \frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} \right| = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

quindi

$$\mathbf{N} = (-\cos t,\ -\sin t,\ 0).$$

Versore binormale

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N} = \left(\frac{b\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{-b\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right).$$

Vettore curvatura:

$$\mathbf{K}(t) = \frac{\frac{d\mathbf{T}(t)}{dt}}{\left| \frac{df(t)}{dt} \right|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left(\frac{-a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0 \right) =$$

$$= \left(\frac{-a\cos t}{a^2+b^2},\ \frac{-a\sin t}{a^2+b^2},\ 0 \right).$$

Raggio di curvatura, ovvero reciproco del modulo del vettore appena trovato: $\rho = \frac{a^2+b^2}{a}$.
Per trovare il cerchio osculatore, troviamo innanzitutto il piano osculatore, ovvero il piano ortogonale al versore binormale e passante per il punto generico P_0 appartenente alla curva. Il piano ortogonale a $\mathbf{B}$ ha equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$ dove i coefficienti a, b, c sono le tre componenti di $\mathbf{B}$: (otteniamo infiniti piani, poi imporremo la condizione di passaggio per un punto)

$$\frac{b\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}}x - \frac{b\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}y + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}z + d = 0.$$

Scegliamo un punto sulla curva e calcoliamo il piano osculatore, e poi il cerchio osculatore, in tale punto. Ad esempio sia $t = \frac{\pi}{2}$, $P_0 = (0, a, \frac{b\pi}{2})$. Per $t = \frac{\pi}{2}$ l'equazione del piano osculatore diventa

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}z + d = 0.$$

Troviamo d :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{b\pi}{2} + d = 0 \iff d = -\frac{ab\pi}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Sostituiamo e semplichiamo per ottenere l'eq. del piano osculatore in P_0 :

$$bx + az - \frac{ab\pi}{2} = 0.$$

L'equazione del cerchio osculatore si ottiene intersecando il piano osculatore e una sfera avente come raggio il raggio di curvatura giá calcolato e centro da determinare. Troviamo il centro del cerchio:

$$c(P_0) = (0, a, \frac{b\pi}{2}) + \mathbf{N}(P_0)\rho = (0, a, \frac{b\pi}{2}) + (0, -1, 0)\frac{a^2+b^2}{a} =$$

$= (0, a - \frac{a^2+b^2}{a}, \frac{b\pi}{2}) = (0, -\frac{b^2}{a, \frac{b\pi}{2}}).$

L'equazione del cerchio osculatore é:

$$\begin{cases} x^2 + \left(y + \frac{b^2}{a}\right)^2 + \left(z - \frac{b\pi}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{a} \\ \\ bx + az - \frac{ab\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. La Cicloide.

Per descrivere la Cicloide si immagini una bicicletta in movimento e si fissi un punto a piacere sul bordo di una delle due ruote: la curva descritta dalla traiettoria di tale punto detta Cicloide. La circonferenza della ruota detta circonferenza generatrice. Se si osserva la ruota di una bicicletta in movimento al buio, la traiettoria descritta da un catarifrangente fissato sulla ruota é una Cicloide.

Il motivo per cui ci si interessa alla Cicloide é che presenta sorprendenti proprietá fisiche. Infatti, é brachistocrona e tautocrona: brachistocrona perché rappresenta il percorso superato nel tempo piú breve tra due punti. Ovvero: dati due punti A e B su un piano verticale sottoposti unicamente alla forza di gravitá, trovare la curva tra essi sulla quale un punto materiale, vincolato a scorrervi senza attrito, vada da quello piú in alto a quello pié in basso nel minor tempo possibile. E' noto che la distanza piú breve tra due punti é il segmento di retta che li congiunge per cui si sarebbe tentati di rispondere che questa é la traiettoria che assicura il minor tempo. Ma non é cos perché conviene partire puntando il piú possibile verso il basso per acquisire la massima velocitá iniziale. Galileo aveva giá affrontato questo problema molti anni prima ed aveva creduto di risolverlo indicando come traiettoria ottimale l'arco di cerchio. Ma la risposta corretta é "la cicloide" che per questo é detta anche curva brachistocrona cioé "dal tempo piú breve".

La Cicloide é tautocrona perché un grave posto in oscillazione lungo una cicloide (con la concavitá rivolta verso l'alto!) la percorre sempre nello stesso tempo, qualunque sia l'ampiezza dell'oscillazione.

Le equazioni parametriche di una cicloide sono:

$$\begin{cases} x(t) = R(t - \sin t) \\ \\ y(t) = R(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Osserviamo subito che é una curva piana (bastano due equazioni per descriverla).

Calcolare il versore tangente per $t = \frac{\pi}{2}$. $\left[\text{R.} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right]$.

Esercizio 3.
Calcolare i versori tangente, normale e binormale alle seguenti curve nei punti indicati:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \quad \text{per } t = 1. \\ z(t) = t^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = 3t^2 \qquad \text{per } t = 1. \\ z(t) = 3t + t^3 \end{cases}$$

Esercizio 4.
Determinare i tre versori del triedro mobile in un generico punto delle curve seguenti:

♠ $\alpha(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t, -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t, 1 + \sin t\right)$

$\left[\text{R.}\mathbf{T} = \left(-\frac{1}{2}\sin t, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, \cos t\right),\ \mathbf{N} = \left(-\frac{1}{2}\cos t, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t, -\sin t\right),\ \mathbf{B} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)\right].$

♠ $\beta(t) = \left(t, 1 + t^2, t\right)$

$\left[\text{R.}\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2(1+2t^2)}}(1, 2t, 1),\ \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2(1+2t^2)}}(-t, 1, -t),\ \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)\right].$

♠ $\gamma(t) = \left(2t, t^2, \ln t\right)$

$\left[\text{R.}\mathbf{T} = \frac{1}{1+2t^2}\left(2t, 2t^2, 1\right),\ \mathbf{N} = \frac{1}{1+2t^2}\left(1 - 2t^2, 2t, -2t\right),\ \mathbf{B} = \frac{1}{1+2t^2}\left(-2t, 1, 2t^2\right)\right].$

♠ $\delta(t) = \left(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t\right)$

$\left[\text{R.}\mathbf{T} = \frac{1}{1+e^{2t}}\left(e^{2t}, -1, \sqrt{2}e^t\right),\ \mathbf{N} = \frac{1}{1+e^{2t}}\left(\sqrt{2}e^t, \sqrt{2}e^t, 1 - e^{2t}\right),\ \mathbf{B} = \frac{1}{1+e^{2t}}\left(-1, e^{2t}, \sqrt{2}e^{2t}\right)\right].$

♠ $\eta(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$

$\Big[\text{R.}\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2+t^2}}(\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1),$
$\mathbf{N} = \frac{\left(-4\sin t - 3t\cos t - t^2\sin t - t^3\cos t, 4\cos t - 3t\sin t + t^2\cos t - t^3\sin t, -t\right)}{\sqrt{(2+t^2)(8+5t^2+t^4)}},$
$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{8+5t^2+t^4}}\left(-2\cos t + t\sin t, -2\sin t - t\cos t, 2 + t^2\right).\Big]$

Esercizio 5. Tra le curve descritte nell'esercizio precedente ve ne sono di piane? Suggerimento: andate a vedere il versore binormale...