Esercizi su integrali doppi e tripli.

Ricordiamo che: un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^2$, del tipo $E = \{(x,y)|a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$, con f, g funzioni continue su $[a,b]$, é detto un dominio normale rispetto all'asse x. Analoga definizione per il dominio normale rispetto all'asse y. In sostanza si tratta di una regione piana in cui una delle due variabili é compresa tra due numeri a e b, mentre l'altra é compresa tra due funzioni continue della variabile precedente, definite in $[a,b]$. Inoltre vale la seguente formula di riduzione: sia $h : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua, con E dominio normale rispetto all'asse x. Allora h é integrabile in E e vale la seguente formula:

$$\int_E h \; d\mu = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} h(x,y)dy \right) dx$$

Viceversa, se il dominio é normale rispetto all'asse y si potrá integrare nel seguente modo:

$$\int_E h \; d\mu = \int_a^b \left(\int_{f(y)}^{g(y)} h(x,y)dx \right) dy$$

Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^3$, del tipo $E = \{(x,y,z)|(x,y) \in I, l(x,y) \leq z \leq u(x,y)\}$, con l e u funzioni continue su I, insieme chiuso e misurabile di $\mathbb{R}^2$, é detto un dominio normale rispetto al piano xy. Analoga definizione per il dominio normale rispetto al piano yz, o rispetto al piano xz. Inoltre vale la seguente formula di riduzione: sia $h : E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione continua, con E dominio normale rispetto al piano xy. Allora h é integrabile in E e vale la seguente formula:

$$\int_E h \; d\mu = \int \int_I \left(\int_{l(x,y)}^{u(x,y)} h(x,y)dz \right) dx \; dy$$

Ricordiamo infine che il volume di un insieme $E \subset \mathbb{R}^3$ é esprimibile con l' integrale triplo

$$\int \int \int_E dx \; dy \; dz,$$

quindi, se $E = \{(x,y,z)|(x,y) \in I, l(x,y) \leq z \leq u(x,y)\}$, il volume di E é l'integrale doppio

$$\int \int_I (u(x,y) - l(x,y))dx \; dy,$$

Esercizio 1.

Calcolare il volume del solido: $E = \{(x, y, z)|(x + 1)^2 + y^2 \leq z \leq 2x + 5\}$.
La funzione $z = 2x + 5$ rappresenta un piano, mentre $z = (x + 1)^2 + y^2$ é un paraboloide con vertice nel punto $(-1, 0, 0)$. Integriamo considerando che $(x + 1)^2 + y^2 \leq z \leq 2x + 5$, e, confrontando il primo e l'ultimo membro della disuguaglianza, si ottiene $x^2 + y^2 \leq 4$, pertanto si ha

$$\int_E h\ d\mu = \int\int_D \left(\int_{(x+1)^2+y^2}^{2x+5} dz \right)$$

dove D é il dominio che, in coordinate polari, si scrive :$0 < \rho < 2,\ 0 < \theta < 2\pi$, quindi (ricordiamo di moltiplicare per ρ visto che stiamo cambiando coordinate)

$$\int_E h\ d\mu = \int\int_D \left(\int_{(x+1)^2+y^2}^{2x+5} dz \right) = \int\int_D (4 - x^2 - y^2) dx\ dy =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (4 - \rho^2)\rho d\rho \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right)_0^2 d\theta =$$

$$= 4 \int_0^{2\pi} d\theta = 8\pi.$$

Esercizio 2.

Calcolare i seguenti integrali doppi:
(a) $\int\int_R (ye^{y^2+x}) dx\ dy$ dove
$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 2y^2,\ 0 \leq y \leq 1\}$.
Il dominio é normale rispetto all'asse y, pertanto l'integrale diventa:

$$\int_0^1 ye^{y^2} \left(\int_0^{2y^2} e^x dx \right) dy = \int_0^1 ye^{y^2} \left(e^{2y^2} - 1 \right) dy =$$

$$\left[\frac{e^{3y^2}}{6} - \frac{e^{y^2}}{2} \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{6}e^3 - \frac{1}{2}e + \frac{1}{3}$$

(b) $\int\int_A \sqrt{x^2 + y^2} dx\ dy$ dove

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + (y - 1)^2 \geq 1,\ y \geq 0\}$.
L'insieme si scrive bene in coordinate polari: siamo dentro la circonferenza di centro 0 e raggio 1, al di fuori della circonferenza di centro $(0, 1)$ e raggio 1, il tutto con $y > 0$. Le due circonferenze si intersecano in $(\rho, \theta) = (1, \frac{\pi}{6})$, e $(1, \frac{5\pi}{6})$.
Quindi in coordinate polari si ha:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_0^1 \sqrt{\rho^2} \rho d\rho + \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{\rho^2} \rho d\rho =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \left[\frac{\rho^3}{3}\right]\Big|_0^1 \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi} d\theta \left[\frac{\rho^3}{3}\right]\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta + \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi} d\theta\right] = \frac{1}{3}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9}.$$

(c) $\int\int_B (x^2(1+x^2y))dx\ dy$ dove

B é la corona circolare di centro l'origine e raggi 1 e 2.
$\left[\mathbf{R.}\,\frac{\mathbf{15\pi}}{\mathbf{4}}\right]$
(d) $\int\int_S (xy)dx\ dy$ dove

S é il semicerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1 con $y \geq 0$.
(usare coordinate cartesiane, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}$)

$\left[\mathbf{R.}\,\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right]$
(e) $\int\int_T (e^{y^2})dx\ dy$ dove

T é il triangolo chiuso del piano x, y di vertici $(0,0), (0,1), (2,1)$.
$(T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 2, \frac{x}{2} \leq y \leq 1\}.)$

$[\mathbf{R.}\ \mathbf{e-1}]$

Esercizio 3.

Dato il dominio
$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x - y - z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \leq 0,\ z \leq 0\}$, si calcoli il volume di T e l'integrale

$$\int\int\int_T \frac{1}{(2-x+y+z)^2} dx\ dy\ dz :$$

$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x - y - 1 \leq z \leq 0,\ x - 1 \leq y \leq 0,\ 0 \leq x \leq 1\}$,
Volume:

$$\int\int\int_T dx\ dy\ dz = \int_0^1 \left[\int_{x-1}^0 \left(\int_{x-y-1}^0 dz\right) dy\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_{x-1}^0 (-x+y+1)\, dy\right] dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-2x+1)dx = \frac{1}{6}$$

Integrale triplo:

$$\int\int\int_T \frac{1}{(2-x+y+z)^2} dx\ dy\ dz = \int_0^1 \left[\int_{x-1}^0 \left(\int_{x-y-1}^0 \frac{1}{(2-x+y+z)^2} dz\right) dy\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_{x-1}^0 \left(1 - \frac{1}{2-x+y}\right) dy\right] dx = \int_0^1 (-\log(2-x) - (x-1))dx = \frac{3}{2} - 2\log 2.$$

Esercizio 3.

Calcolare:

$$\int\int_T e^{\sqrt{x^2+y^2}} |x| dx\ dy$$

$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16,\ y \geq 0\}$,

$\left[\mathbf{R. 4e^2(5e^2 - 1)}\right]$

$$\int\int_S \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx\ dy$$

$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq 2y \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$,

$\left[\mathbf{R. \frac{32}{9}}\right]$