Esercizi sulle superfici

Esercizio 1.

Data la superficie di equazioni parametriche:
$\varphi(u, v) = (u^2 - v, u\cos v, u + v)$, determinare l'equazione cartesiana del piano tangente in $P_0 = \varphi(-1, 0)$.

Troviamo i vettori che costituiscono la giacitura del piano tangente a φ, ovvero ${}_u = \frac{\partial\varphi}{\partial u}$, $\varphi_v = \frac{\partial\varphi}{\partial v}$.

$$\varphi_u = (2u, \cos v, 1), \quad \varphi_v = (-1, -u\sin v, 1),$$

che, calcolati per $(u, v) = (-1, 0)$ danni i vettori $(-2, 1, 1), (-1, 0, 1)$. Il loro prodotto vettoriale dá come risultato il vettore normale alla superficie nel punto, ovvero $N = (1, 1, 1)$. (il versore normale é dato da $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$)
Con questi dati calcoliamo l'eq. cartesiana del piano tangente: $x + y + z + 1 = 0$.

Esercizio 2.

Determinare le coordinate del versore normale e l'equazione cartesiana del piano tangente alle seguenti superfici nel punto assegnato:

(a) $\varphi(u, v) = (u^2 + 3u^2 v, u^2 + 2uv, u + v)$, $P_0 = \varphi(-1, 0)$.
$\left[\text{R.} \frac{1}{\sqrt{19}}(1, -3, 3),\ x - 3y + 3z - 1 = 0\right]$.

(b) $\varphi(u, v) = (u^2 + v^2, u^2 - v^2, 4uv)$, $P_0 = \varphi(1, 0)$.
$\left[\text{R.} \frac{1}{\sqrt{128}}(8, -8, 0),\ x - y = 0\right]$.

(c) $\varphi(u, v) = (u + v, u - v, u^2 + v^2)$, $P_0 = \varphi(0, 0)$.
$\left[\text{R.} \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -2),\ z = 0\right]$.

(d) $\varphi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$, $P_0 = \varphi(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.
$\left[\text{R.} \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}),\ \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2z - 2\sqrt{2} = 0\right]$.

(e) $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, $P_0 = \varphi(2, 0)$.
$\left[\text{R.} \frac{1}{\sqrt{17}}(-4, 0, 1),\ -4x + z + 4 = 0\right]$.