

Esercizi sui massimi e minimi di funzioni in piú variabili.

Ricordiamo che per cercare i massimi e minimi relativi di una funzione di due variabili (che sará sempre di classe C^2) $f(x, y)$ si procede nel seguente modo:

*) Si cercano in punti (x_0, y_0) tali che $f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0)$, dove f_x, f_y rappresentano le derivate parziali della funzione $f(x, y)$ rispetto alle variabili x, y .

*) Si calcola il determinante Hessiano $H(x, y)$, ovvero:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Se risulta

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0) \\ H(x_0, y_0) > 0, f_{xx}(x_0, y_0) > 0, \end{cases}$$

allora (x_0, y_0) é un punto di minimo relativo per $f(x, y)$. Se

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0) \\ H(x_0, y_0) > 0, f_{xx}(x_0, y_0) < 0, \end{cases}$$

allora (x_0, y_0) é un punto di massimo relativo per $f(x, y)$.

Se, infine, $H(x_0, y_0) < 0$, il punto (x_0, y_0) non é né di massimo né di minimo per la funzione e viene chiamato punto di sella.

Se $H(x_0, y_0) = 0$ si deve procedere in altro modo.

Esercizio 1. Determinare massimi e minimi relativi delle seguenti funzioni:

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$

Svolgimento: $f_x = 3x^2 + y, f_y = 3y^2 + x$, mettendo a sistema otteniamo che : $f_x = 0 = f_y$ se e solo se $x = 0, y = 0$ e $x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}$. Il determinante Hessiano vale $H(x, y) = 36xy - 1$. Calcoliamo il determinante Hessiano sui punti trovati :

$H(0, 0) = -1, H(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = 3, f_{xx}(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = -2$, quindi deduciamo che $(0, 0)$ é un punto di sella, quindi né di massimo né di minimo, mentre il punto $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ é di massimo relativo.

$$(b) f(x, y) = x^3 - y^3 + xy$$

[R. $(0, 0)$ punto di sella, $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ minimo relativo].

$$(c) f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$$

[R. $(0, 0)$ punto di sella, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ minimo relativo].

$$(d) f(x, y) = x^3 - y^3 - xy$$

[R. $(0, 0)$ punto di sella, $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ massimo relativo].

$$(e) f(x, y) = 4x^4 - 16x^2y + x$$

[R. $(\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$ punto di sella].

$$(f) f(x, y) = 2(x^2 + y^2 + 1) - (x^4 + y^4)$$

[R. $(0, 0)$ minimo relativo, $(0, \pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$, punti di sella, $(1, \pm 1)$, e $(-1, \pm 1)$ massimi relativi].

$$(g) f(x, y) = 2(x^4 + y^4 + 1) - (x + y)^2$$

[R. $(0, 0)$ Hessiano nullo!, $(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}})$ minimi relativi].