Facoltà di Architettura
Matematica
Laurea Specialistica in Progettazione
Prova scritta del 31 gennaio 2006
Proff. Laura Tedeschini Lalli,Paola Magrone.

Svolgere due problemi a scelta tra i tre proposti, utilizzando il retro dei fogli per i conti. Non usare altri fogli. Riportare le risposte negli spazi.

Problema 1.

(1a) Sulla sfera di raggio $R = 10$ giace una circonferenza di centro il polo ($\varphi = \frac{\pi}{2}$,) ed equazione $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
Scegliamo come zero della variabile φ il piano (x, z), cosí che il polo ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) sará il polo Nord, e la circonferenza $\varphi = \frac{\pi}{3}$ é posizionata di conseguenza.
(i) Calcolare il raggio curvilineo della circonferenza;
l'angolo tra il raggio posizionato a $\varphi = \frac{\pi}{3}$ e la verticale é $\alpha = \frac{\pi}{6}$, quindi il raggio curvilineo richiesto é $\rho = 10 \cdot \frac{\pi}{6}$. (vedi figura 1)

(ii) Calcolare la lunghezza della circonferenza.
il raggio retto della circonferenza é $r = 10 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$. La lunghezza della circonferenza é 10π.

(ii) indicare schematicamente dove si trova questa circonferenza
vedi grafico fig.1

(1b) Sulla sfera di raggio $R = 10$ é disegnato un triangolo sferico di angoli $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{5}$.
Calcolare l'area della superficie del triangolo sferico.
(Suggerimento: la somma degli angoli interni di un triangolo sferico é pari a $\pi + 2CS$, dove S é la superficie del triangolo e C é una costante che si puó calcolare)
La formula suggerita consente di trovare l'area del triangolo come

$$(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi)100 = S_{ABC}$$

ma si poteva anche osservare che il triangolo, avendo due angoli retti, é posizionato con la base sull'equatore e i due lati sono due meridiani (ruotando la sfera lo si puó portare in questa posizione!), quindi lo "spicchio" che racchiude non é altro che $\frac{1}{10}$ di una semisfera, quindi $\frac{1}{20}$ di una sfera, quindi la superficie del triangolo misura $\frac{4\pi R^2}{20} = 20\pi$.

Problema 2. Questo motivo é ripreso dall'intarsio in oro ed argento di uno scrittoio portatile del XIV secolo (Egitto). Dal punto di vista delle simmetrie si puó analizzare a vari livelli grafici:

1) Considerare il rosone centrale, a motivi puramente geometrici.
-studiare il gruppo di isometrie che lo lascia invariato;
-ombreggiare il dominio fondamentale.

2) Considerare la corona a motivi floreali. Ignorare i rametti ed eventuali discordanze tipografiche ed artigianali.
-Studiare il gruppo di isometrie che lo lascia invariato;
-ombreggiare il dominio fondamentale.

3) Il motivo, preso nella sua interezza, é invariante rispetto a quali simmetrie?

4) Dulcis in fundo: pensate l'intero medaglione libero di muoversi nello spazio $\mathbf{R^3}$ (tornando poi sul piano). Esistono movimenti rigidi che lo lasciano invariato?quali?

Problema 3. Sul toro T^2 di dimensioni 20×20 vi sono i due punti $P(1,15),\ Q(18,16)$.
- Calcolare la loro distanza sul toro.
Svolgendo i conti (Teorema di Pitagora), si deduce che la distanza , cioé il cammino minimo, viene realizzata dal segmento che congiunge Q e $P'(21,15)$, (fig.2) e la distanza misura $\sqrt{10}$.

-Disegnare il segmento che misura questa distanza sul dominio fondamentale. Vedi fig.2.

- Qual'é la relazione di equivalenza che individua questo toro sul piano $\mathbf{R^2}$?
La relazione é: $(x,y) \sim (x',y')$ se $\begin{cases} x = x' + 20h \\ \\ y = y + 20k \end{cases}$, $k,h \in \mathbf{Z}$.

- Considerare il segmento che passa per i punti $(0,0),\ (16,20)$.
(i) la retta che lo continua é periodica? (ovvero: si chiude?)
la retta ha equazione $y = \frac{5}{4}x$, ed avendo pendenza razionale sappiamo che si chiude. Possiamo fare di piú, possiamo trovare il punto dove si chiude, cioé trovare un altro rappresentante di $(0,0)$ nella relazione di equivalenza che definisce il toro per cui passa la retta.

$$(0,0) \sim (20h, 20k) \Longrightarrow\ 20k = \frac{5}{4} \cdot 20h \Longrightarrow\ 80k = 100h$$

se $k = 5, h = 4$, e questi sono i valori minimi di h,k per cui la retta ripassa per l'origine. Quindi il punto cercato é $(80,100)$.
(ii) se sí, indicare quanti "giri" fa.
Basta "guardare" il reticolo e osservare che la retta partendo dall'origine, prima di toccare il punto $(80,100)$ tocca le rette parallele $y = 20, 40, 60, 80, 100$, e tocca le rette $x = 20, 40, 60, 80$. Quindi, nel linguaggio delle coordinate intrinseche, dove chiamiamo $x = \theta$ e $y = \varphi$, la retta si avvolge 5 volte nella coordinata φ, 4 nella θ. Vedi fig.3