# Trasformazioni, simmetrie e tassellazioni del piano

Abbiamo finora analizzato le possibili ripetizioni di un motivo grafico su un pezzo di carta, che siano immaginabili come incollature della carta, cosí ottenendo degli oggetti tridimensionali piú o meno intuitivi. Il legame tra gli oggetti ottenuti e le ripetizioni su carta è che si può immaginare che il nostro Plink percorra la superficie dell'oggetto di carta, ed allora disegnerebbe cosí la mappa di ciò che vede.

Per questo queste geometrie localmente euclidee forniscono modelli matematici per dei moti, come di volta in volta abbiamo visto negli esempi.

Un altro modo di vedere queste ripetizioni è di immaginare che sia l'intero piano ad essere sottoposto a trasformazioni, e chiedersi:

Quanti modi ci sono di ripetere un motivo grafico nel piano in modo da ricoprirlo completamente di mattonelle uguali, "tassellandolo"? Cioè, quanti "arabeschi" si possono ideare, che si distinguano sul piano *compositivo* della legge di ripetizione? Questa domanda, nata e formulata alla fine del 1800 nel contesto delle classificazioni cristallografiche, ha ricevuto risposta completa, matematicamente parlando, nel 1924, da Polya.

I gruppi di tassellazione del piano sono, tra tutti i gruppi di trasfomazioni isometriche del piano, quelli che ammettono **due traslazioni**, cioè traslazioni lungo due vettori indipendenti.

Essi vengono a volte anche chiamati "gruppi di carte da parati", "arabeschi", o "gruppi cristallografici bidimensionali", a seconda della lingua e del contesto in cui vengono adoperati.

Infatti il gruppo generato dalle due traslazioni indipendenti, evidentemente infinito, dà luogo, da un punto di vista geometrico, ad un reticolo sul piano. Questo reticolo di parallelogrammi identici è la "tassellazione" cui i gruppi devono il loro nome. Ogni gruppo cristallografico del piano è formato di isomatrie che lasciano inviariato questo reticolo. Un reticolo di questo tipo è, come abbiamo visto, una delle rappresentazioni del Toro sul piano. La dimostrazione di Polya, infatti, è vista nel contesto degli automorfismi del Toro bidimensionale.

Nel bellissimo e pluripremiato video "Arabescos y Geometría", si illustrano alcuni dei gruppi di simmetria con esempi presi dai palazzi dell'Alhambra, a Granada. Abbiamo seguito lo stesso procedimento di "ricerca su campo", applicandolo allo studio dei numerosi motivi ripetitivi che la nostra città e regione ci offrono. Ne sono risultati bei lavori di rilievo degli studenti di architettura, così come delle allieve del corso di Scienze della Formazione de La Sapienza. Di seguito diamo la lista dei 17 *gruppi di simmetria del piano*, che può poi essere tenuta presente nello svolgere gli esercizi consigliati alla fine di questa appendice, ed usata come guida per una ricerca "su campo".

Seguiamo, nel fare la lista, la nomenclatura internazionale cristallografica, che a sua volta segue un criterio di classificazione dei 17 gruppi a seconda dei movimenti che vi compaiono.

(Coxeter riporta due diverse scoperte indipendenti di questo fatto [1]). La risposta è inizialmente sorprendente, perché nel piano esistono solo 17 leggi di ripetizione. In fig. 1 trovate i 17 gruppi di simmetria del piano, elencati graficamente, a partire da uno stesso motivo di base, evidenziando così tutte le possibilità ottenibili a partire da un unico motivo. Naturalmente, cambiando il motivo di base si possono ottenere infinite altre variazioni; ma se il motivo tassella il piano, la legge compositiva cui soggiace è certamente una di queste 17. Il motivo grafico che viene ripetuto di volta in volta, come vedete, occupa una regione limitata; la minima regione occorrente a generare tutto l' arabesco sotto l' azione di movimenti del piano matematicamente strutturati in gruppi, viene detta dominio fondamentale. Ogni gruppo è caratterizzato dal suo dominio fondamentale, cioè se trovate due regioni diverse, entrambe candidate ad essere "la regione minima" dello stesso arabesco, esse sono equivalenti perché sono ottenibili l' una dall' altra con le regole di comportamento ai bordi tipiche di quel gruppo (un bordo si incolla ad un altro? O piuttosto si ripete specchiato dall' altro lato del bordo?). Sottolineamo queste domande e la casistica che ne segue, perché è un fatto matematico, e questo per un matematico basta (ed occorre anche), ma anche perché è importante nel lavorare in più persone, e a fini di comunicazione ad altri studiosi, che si sappia con certezza quali modi di operare sono in realtà equivalenti. Anche a questo ci serve la matematica. Questo spargere il motivo è corrispondente a immaginare di muovere il dominio fondamentale, con uno dei movimenti rigidi elementari del piano (gli elementi del gruppo): rotazioni, traslazioni, riflessioni e glissoriflessioni. Sul piano analitico, si cercano i movimenti del piano che mantengono inalterato il disegno completo. L' insieme di tutti i movimenti del piano che lasciano invariato un disegno ha struttura matematica di gruppo. Perché solo 17? Per chiunque si accinga a classificare qualcosa, un teorema di questo tipo è estremamente utile, garantendo la possibilità stessa della finitezza della classificazione, e dandogliene i criteri. Si chiamano "gruppi cristallografici piani" i gruppi di movimenti rigidi del piano che contengono come gruppi infiniti solo quelli generati da due traslazioni lungo vettori non paralleli. Abbiamo così già drasticamente ridotto la considerazione dei movimenti rotatori ai soli che generano un gruppo finito, cioè alle rotazioni di angoli sottomultipli interi dell' angolo giro, $360°$ o $2\pi$. L' esistenza di due vettori indipendenti di traslazione determina un reticolo sul piano. La successiva considerazione di altri movimenti rigidi, non può che limitarsi a quelli compatibili con le due traslazioni, cioè che lasciano invariato il reticolo così ottenuto. Sotto altri movimenti dello stesso gruppo, un lato del reticolo deve andare in un altro lato del reticolo, e questo limita di molto le possibilità: in sostanza, o si fissano alcuni lati (come nel caso di riflessioni e glissoriflessioni attorno ad essi), oppure per rotazione, un lato viene mandato in un altro, con esso incidente. Stabilito il reticolo, pochi angoli di rotazione (e certamente un numero finito) si prestano a questa invarianza. Gli angoli di rotazione compatibili con una tassellazione del piano sono solo quelli di $60°, 90°, 120°$ e $180°$ ($\pi/3, \pi/2, 2\pi/3$ e $\pi$). Questa è la linea dimostrativa, che Polya ridusse dunque

[1] Il matematico Coxeter, nella sua recensione del lavoro di Perez-Gomez per la Mathematical Review, ha però contestato l' esempio di uno degli ultimi 4 gruppi trovati, p3m1

allo studio geometrico delle azioni periodiche su un toro, dal nome della superficie, il toro (o ciambella), che è la rappresentazione tridimensionale del reticolo, i cui lati si pensino identificati. La classificazione dei gruppi cristallografici del piano si fa per convenzione partendo dall'angolo minimo di rotazione possibile nel gruppo. L ulteriore differenziazione tra i gruppi si ottiene analizzando l'eventuale presenza di riflessioni, glissoriflessioni e la loro posizione rispetto ai centri di rotazione presenti, e ai necessari assi di traslazione. In (...) il lettore troverà un raffinamento di questa classificazione, a fini di catalogazione di pavimenti storici. Noi ci siamo attenuti alla classificazione matematica. Il bellissimo video "Arabescos y geometria" spiega con chiarezza queste costruzioni, a partire dalle decorazioni dei palazzi dell' Alhambra. La videocassetta è stata prodotta dall' Università a distanza di Madrid (UNED), e la sua versione spagnola (molto comprensibile per lo spettatore italiano) si può ordinare tramite il sito di UNED a: http://www.uned.es/cemav/pedido.htm

**I 17 gruppi di tassellazione del piano: riconoscimento e classificazione.**

La prima classificazione dei 17 gruppi è ottenuta osservando la rotazione minima del piano che lascia invariato il motivo. Cerchiamo dunque l'angolo minimo di rotazione. All'interno dei gruppi che ammettono la stessa rotazione minima, distingueremo poi a seconda che ammettano anche altro tipo di trasformazioni, o simmetrie, che lasciano invariato il motivo.

**Rotazione minima di** $\frac{\pi}{3}$.

Ci si chiede se il gruppo ammette anche riflessioni. Nel caso di un angolo minimo di $\frac{\pi}{3}$, se esistono riflessioni, per ogni centro di rotazione passa un asse di riflessione.

**P6 :** Il motivo non presenta simmetrie di riflessione. In questo caso il gruppo si chiama "P6", perchè è un gruppo periodico di ordine 6, ovvero la composizione consecutiva per sei volte di una rotazione di $\frac{\pi}{3}$ risulta nel movimento nullo, elemento identità del gruppo.

**P6M :**Il motivo grafico presenta simmetrie di riflessione. In questo caso si aggiunge la lettera "M", nella notazione internazionale cristallografica, per "mirror", letteralmente, appunto "specchio".

**Rotazione minima di** $\frac{\pi}{2}$**.**Di nuovo, ci si chiede se esistano anche riflessioni, e vedremo che queste risultano in composizioni diverse a seconda che il loro asse passi o meno per un centro di rotazione.

**P4 :** Il motivo non presenta simmetrie di riflessione. Il gruppo finito è dunque costituito dalle possibili rotazioni consecutive di $\frac{\pi}{2}$, ed ammette 4 elementi, perché alla quarta rotazione si ottiene il movimento identico.

**P4G :** Esistono riflessioni, ma nessuno degli assi di riflessione passa per alcuno dei centri di rotazione di $\frac{\pi}{2}$. In questo caso, data la struttura di gruppo, necessariamente compaiono nel gruppo delle "glissoriflessioni", il cui asse non è parallelo ad alcun asse di riflessione. Per questo si aggiunge la lettera "G", da "glide reflection", ovvero "riflessione scivolata".

**P4M :** Analogamente al caso di P6M, questo è un gruppo di rotazione minima $\frac{\pi}{2}$, che ammette riflessioni il cui asse passa per centri di rotazione minima.

**Rotazione minima di $\frac{2\pi}{3}$ .**Tutti i gruppi di movimenti che ammettono questa come rotazione minima, contiene come *sottogruppo* il gruppo generato da questa rotazione, che ha 3 elementi; essi vengono quindi tutti denotati con una sigla contenente P3. In questo caso, come nel caso dei gruppi P6, se esistono riflessioni, i loro assi necessariamente passano per un qualche centro di rotazione dell'angolo minimo di rotazione che caratterizza il gruppo. Le successive lettere nella sigla, d'altronde, distinguono se esistono o meno centri di rotazione per cui non passa alcun asse di riflessione

**P3 :** La parte finita del gruppo non presenta simmetrie tranne quelle rotazionali. Con tre rotazioni consecutive di un angolo di $\frac{2\pi}{3}$, si ottiene l'identità.

**P31M :** Esistono riflessioni, ma esistono anche centri di rotazione di $\frac{2\pi}{3}$ per i quali non passa alcun asse di riflessione.

**P3M1 :**Per ogni centro di rotazione passano assi di riflessione.

**Rotazione minima di $\pi$.**Il minimo angolo di rotazione che lascia invariato il motivo misura $\pi$. Osserviamo ora se il gruppo ammette riflessioni; in questo caso, i loro assi posso passare per un qualche centro di rotazione, o anche possono non passare per alcun centro di rotazione. Questa volta la notazione si discosta

**P2 :**Il gruppo ammette soltanto rotazioni di $\pi$. Ripetendo 2 volte la rotazione si torna all'identità.

**CMM :**Vi sono assi di simmetria che passano per centri di rotazione, ed anche centri di rotazione per cui non passa alcun asse di dimmetria. La ragione per cui appaiono due lettere M nella sigla è che allora esistono riflessioni rispetto ad assi che vanno in direzioni diverse, e che si intersecano perpendicolarmente in centri di rotazione di $\pi$.

**PMM :**Per ogni centro di rotazione passano assi di riflessione. (Di nuovo, gli assi di simmetria si intersecno perpendicolarmente in un centro di rotazione).

**PMG :**Gli assi di riflessione *non passano per alcun centro di rotazione. Infatti tutti gli assi di riflessione sono in questo caso paralleli, ed inoltre, in direzione ad essi perpendicolare, esistono assi di glissoriflessione.*

**PGG :**Non esistono riflessioni, ma esistono glissoriflessioni. In questo caso, necessariamente vi sono due direzioni di glissoriflessione, perpendicolari tra loro.

**Non esistono rotazioni che lasciano invariato il motivo.**Dunque, per finire, i gruppi che ammettono solo riflessioni o glissoriflessioni, e benintesto le due traslazioni indipendenti che caratterizzano tutti i gruppi di tassellazione piana.

**CM :**Il motivo ammette sia riflessioni, che glissoriflessioni, con asse parallelo ma distinto da quelli di riflessione.

**PM :**Vi sono riflessioni; non vi sono glissoriflessioni, se non eventualmente quelle banalmente ottenute lungo lo stesso asse delle riflessioni, componendole con una traslazione.

**PG :**Vi sono glissoriflessioni, ma non riflessioni.

**P1 :**Il gruppo non ammette altra simmetria che le due traslazioni.

Questa è la casistica completa. Così equipaggiati, potete fare "lavoro su campo", catalogando motivi simmetrici. Da questo lavro possono nascere ulteriori problematiche. In figura, la ricostruzione del pavimento di una taberna dei Mercati Traianei a Roma, ottenuta dai piccoli spezzoni di pavimento ancora esistenti, e dallo studio di quali gruppi di simmetria fossero con essi compatibili. Il lavoro segue un'idea iniziale della studentessa A. Salvatore, ed è poi stato portato a termine da A. Spatafora ed A. Carlini.