Analisi I - CdL in Ottica e Optometria
Prova scritta del 29 gennaio 2007

Usare e consegnare solo i fogli bianchi per la bella, non si possono consultare testi o appunti, né usare calcolatrici di alcun genere. Usare i fogli a quadretti per la brutta (da NON consegnare).

Esercizio 1.(2 punti per domanda)

1a. Dato il punto di coordinate cartesiane $P(x, y) = (4, -4)$ scriverne le sue coordinate polari $P(\rho, \theta)$.

1b. Dato il numero complesso $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ scriverne la forma cartesiana $z = x + iy$.

1c. Dato il vettore $\underline{v} = (1, \frac{1}{3})$ scrivere le coordinate di un vettore ortogonale a $\underline{v}$.

1d. Data la parabola di equazione $f(x) = -x^2 - x - 1$, scrivere le coordinate (x, y) dei punti di intersezione della parabola con l'asse x e la coordinata del punto di intersezione con l'asse y.

$1e$. Calcolare una primitiva di $\frac{1}{x^2}$.

$1f$. Dire quali tra queste funzioni ammettono limite finito per x che tende a $+\infty$

$$f_1(x) = x;\ f_2(x) = \frac{1}{x}$$

Esercizio 2.(3 + 4 punti)
Calcolare il seguente limite usando il Teorema di De l'Hopital e poi calcolarlo anche usando la formula di Taylor (é possibile consultare gli sviluppi su un testo):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x - x^3}{\sqrt{2} x^3}$$

Esercizio 3.(8 punti)
Data la funzione:

$$f(x) = \ln(x^2 + x + 1) - 3$$

trovare: l'insieme di esistenza, limiti a $\pm\infty$ se ha senso farli, limiti nei punti di frontiera dell'insieme di esistenza, derivata prima, studio del segno della derivata prima, eventuali punti di massimo e minimo relativo. Calcolare anche il VALORE della funzione nei punti di massimo e minimo. Eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui. Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $x = 0$.

Bonus (2 punti): studio del segno della derivata seconda.

Esercizio 4.$(4 + 2$ punti)
Calcolare il seguente integrale

$$\int (x^2 + 3x)^{\frac{1}{2}}(2x + 3)dx.$$

Data la funzione $f(x) = x^3 - 1$ calcolare l'integrale definito di $f(x)$ tra 1 e 3. Fare un disegno approssimativo dell'area calcolata.