Analisi I - CdL in Ottica e Optometria
Prova scritta del 18 giugno 2007

SOLUZIONI

Esercizio 1.(2 punti per domanda)

1a. Dato il punto di coordinate cartesiane $P(x,y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ scriverne le sue coordinate polari $P(\rho,\theta)$.

$P(\rho,\theta) = (1, \frac{\pi}{4})$.

1b. Dato il numero complesso $z = 4e^{3i\pi}$ scriverne la forma cartesiana $z = x + iy$.

$z = -4 + i0$

1c. Dato il vettore $\underline{v} = (1,-1)$ scrivere le coordinate di un vettore ortogonale a $\underline{v}$ e di un vettore parallelo a $\underline{v}$.

Ortogonale: $(1,1)$, parallelo $k(1,-1)$.

1d. Calcolare una primitiva di $\cos x$

$\sin x + c$ sono tutte le primitive di $\cos x$.

1e. Data la funzione $f(x) = x^2 + 8x + 16$ trovare le coordinate delle intersezioni di $f(x)$ con gli assi cartesiani.

$x = -4$ é il punto di intersezione con l'asse x infatti $f(-4) = 0$. Inoltre $f(0) = 16$.

1f. Dire quali tra queste funzioni passa per l'origine degli assi cartesiani:

$$f_1(x) = x^2 + 1; \;\; f_2(x) = \arctan x, \;\; f_3(x) = \cos x$$

Solo f_2 perché é l'unica che si annulla in zero.

Esercizio 2.(3 + 4 punti)
Calcolare il seguente limite usando il Teorema di De l'Hopital e poi calcolarlo anche usando la formula di Taylor

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 - 2e^x + 2x + x^5}{\frac{1}{2}x^2}$$

Con il Teorema di De l'Hopital, derivando due volte numeratore e denominatore si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 - 2e^x + 2x + x^5}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2e^x + 2 + 5x^4}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2e^x + 20x^3}{1} = -2$$

Con Taylor:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2-2e^x+2x+x^5}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2-2(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2))+2x+x^5}{\frac{1}{2}x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x^2+o(x^2)+x^5}{\frac{1}{2}x^2} = -2$$

Esercizio 3.(9 punti)
Data la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2x + 1$$

Insieme di esistenza: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Limiti:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

Derivata prima:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2$$

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{-1+2x^2}{x^2} \geq 0$$

si deve guardare unicamente agli zeri del numeratore, quindi

$$f'(x) \geq 0 \iff x^2 \geq \frac{1}{2} \iff |x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

I punti $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sono rispettivamente un massimo e un minimo relativi.

Il VALORE della funzione nei punti di massimo e minimo é

$$f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \qquad f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = +\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1$$

Eventuali asintoti obliqui: potrebbero esserci, quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + 1 = 1$$

asintoto a $+\infty$ é la retta $y = 2x + 1$. Analogamente si calcola che la stessa retta é asintoto anche a $-\infty$.

Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $x = 2$

Il coefficiente angolare sará $f'(2) = \frac{7}{4}$, per trovare il valore dell'altro parametro imponiamo il passaggio per il punto:

$$f(2) = \frac{7}{4}2 + q, \implies q = 2$$

la retta tangente é $y = \frac{7}{4}x + 2$.

Esercizio 4.(4 + 2 punti)
Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{1}{1+8x^2} dx.$$

$1+8x^2 = 1+\sqrt{8}x$ quindi cerchiamo un'arcotangente. La primitiva sará $\frac{1}{\sqrt{8}} \arctan(\sqrt{8}x) + c$.

Data la funzione $f(x) = 2x^3 - 1$ calcolare l'integrale definito di $f(x)$ tra 0 e 2π.

$$\int_0^{2\pi} 2x^3 - 1 = \left[\frac{2}{4}x^4 - x\right]_0^{2\pi} = 8\pi^4 - 2\pi.$$