Analisi I - CdL in Ottica e Optometria
PROVA DI AUTOVALUTAZIONE (TRE ORE DI TEMPO)

Esercizio 1.(2 punti per domanda)

1a. Dato il punto di coordinate cartesiane $P(x, y) = (7, -8)$ scriverne le sue coordinate polari.

Risposta: $P(\rho, \theta) = (\sqrt{113}, \arctan\frac{-8}{7})$

1b. Dato il numero complesso $z = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$ scriverne la forma cartesiana $z = x + iy$.

Risposta: $z = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 4(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$

1c. Dato il vettore $\underline{v} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ scrivere le coordinate di due vettori paralleli a $\underline{v}$.

Risposta: tutti i vettori del tipo $k(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ con $k \in \mathbb{R}$ sono proporzionali a $\underline{v}$ e quindi paralleli ad esso.

1d. Data la parabola di equazione $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$, scrivere le coordinate (x, y) del vertice (ovvero le coordinate del minimo!!) usando la derivata di $f(x)$.

Risposta: $f'(x) = 6x - 6 = 0$ se $x = 1$. Quindi $x = 1$ é l'ascissa del minimo. L'ordinata é data da $f(1) = -2$. Quindi il vertice ha coordinate $(1, -2)$.

1e. Calcolare una primitiva di $\frac{1}{x}$.

Risposta: $\int \frac{1}{x} = \ln x$.

1f. Dire quali tra queste funzioni sono continue in $x = 1$:

$$f_1(x) = \frac{1}{x-1};\ f_2(x) = \frac{1}{(x-1)^2};\ f_3(x) = \ln(x+1)$$

Risposta: $f_1,\ f_2$ non possono essere continue in 1 perché il loro denominatore si annulla. f_3 lo é perché la funzione logaritmo é continua dove é definito il suo argomento.

Esercizio 2.(3 + 4 punti)
Calcolare il seguente limite usando il Teorema di De l'Hopital e poi calcolarlo anche usando la formula di Taylor (é possibile consultare gli sviluppi su un testo):

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{2x}$$

Soluzione:
Usando De l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x}{2} = \frac{1}{2}$$

Usando Taylor:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)}{2x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + o(x^2)}{2x} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 3.(9 punti)
Data la funzione:

$$f(x) = \frac{2}{x+1}e^x$$

trovare: l'insieme di esistenza, limiti a $\pm\infty$ se ha senso farli, limiti nei punti di frontiera dell'insieme di esistenza, derivata prima, studio del segno della derivata prima, eventuali punti di massimo e minimo relativo. Calcolare anche il VALORE della funzione nei punti di massimo e minimo. Eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui. Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $x = 2$.

Soluzione:

Insieme di esistenza: $\{x \neq -1\}$. Limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x+1}e^x = +\infty, \ \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x+1}e^x = 0$$

(esponenziale negativo...)

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{2}{x+1}e^x = +\infty, \ \lim_{x\to-1^-} \frac{2}{x+1}e^x = -\infty.$$

Potrebbe esserci asintoto obliquo a $+\infty$, proviamo a fare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x(x+1)}e^x = +\infty$$

quindi a $+\infty$ non c' é asintoto obliquo.

$$f'(x) = \frac{2}{x+1}e^x - e^x\frac{2}{(x+1)^2} = e^x\left(\frac{2(x+1)-2}{(x+1)^2}\right)$$

studiamo segno e zeri della derivata prima:

$$f'(x) = e^x\left(\frac{2x}{(x+1)^2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

(denominatore SEMPRE positivo, l'esponenziale é' sempre positivo, guardiamo SOLO il numeratore). In zero c'e' un minimo. Valore minimo: $f(0) = 2$.

La retta tangente in $x = 2$ ($f(2) = e^2\frac{2}{3}$) ha pendenza $f'(2) = e^2\frac{4}{9}$. Imponendo al condizione di passaggio per $(2, e^2\frac{2}{3})$ si otiene:

$$y = e^2\frac{4}{9}x + q \ \Rightarrow e^2\frac{2}{3} = e^2\frac{4}{9}\cdot 2 + q \ \Rightarrow q = -e^2\frac{2}{9}.$$

Pertanto la retta tangente al grafico in $x = 2$ é $y = e^2\frac{4}{9}x - \frac{2}{9}e^2$

Esercizio 4.(3 + 4 punti)
Calcolare il seguente integrale

$$\int \sin x \cos x dx.$$

Data la parabola di equazione $f(x) = -x^2+4x-3$ calcolare l'integrale definito di $f(x)$ tra 1 e 3. Fare un disegno approssimativo dell'area calcolata.

Soluzione:

$$\int \sin x \cos x dx = \int f \cdot f' = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

$$\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 3x \right]_1^3 =$$

$$\left(-\frac{27}{3} + 18 - 9 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3 \right) = \frac{4}{3}.$$