Esercizi sui massimi e minimi di funzioni in piú variabili.

Ricordiamo che per cercare i massimi e minimi relativi di una funzione di due variabili (che sará sempre di classe C^2) $f(x, y)$ si procede nel seguente modo:

$*$) Si cercano in punti (x_0, y_0) tali che $f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0)$, dove $f_x,\ f_y$ rappresentano le derivate parziali della funzione $f(x, y)$ rispetto alle variabili x, y.

$*$) Si calcola il determinante Hessiano $H(x, y)$, ovvero:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Se risulta

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0) \\ \\ H(x_0, y_0) > 0,\ f_{xx}(x_0, y_0) > 0, \end{cases}$$

allora (x_0, y_0) é un punto di minimo relativo per $f(x, y)$. Se

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0) \\ \\ H(x_0, y_0) > 0,\ f_{xx}(x_0, y_0) < 0, \end{cases}$$

allora (x_0, y_0) é un punto di massimo relativo per $f(x, y)$.

Se, infine, $H(x_0, y_0) < 0$, il punto (x_0, y_0) non é né di massimo né di minimo per la funzione e viene chiamato punto di sella.
Se $H(x_0, y_0) = 0$ si deve procedere in altro modo.

Esercizio 1. Determinare massimi e minimi relativi delle seguenti funzioni:

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$

Svolgimento: $f_x = 3x^2 + y,\ f_y = 3y^2 + x$, mettendo a sistema otteniamo che : $f_x = 0 = f_y$ se e solo se $x = 0, y = 0$ e $x = -\frac{1}{3},\ y = -\frac{1}{3}$. Il determinante Hessiano vale $H(x, y) = 36xy - 1$. Calcoliamo il determinante Hessiano sui punti trovati :
$H(0, 0) = -1$, $H(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = 3$, $f_xx(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = -2$, quindi deduciamo che $(0, 0)$ é un punto di sella, quindi né di massimo né di minimo, mentre il punto $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ é di massimo relativo.

(b) $f(x,y) = x^3 - y^3 + xy$

$\left[\text{R. } (0,0) \text{ punto di sella, } \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \text{ minimo relativo}\right].$

(c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$

$\left[\text{R. } (0,0) \text{ punto di sella, } \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ minimo relativo}\right].$

(d) $f(x,y) = x^3 - y^3 - xy$

$\left[\text{R.}(0,0) \text{ punto di sella, } \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ massimo relativo}\right].$

(e) $f(x,y) = 4x^4 - 16x^2y + x$

$\left[\text{R. } \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) \text{ punto di sella}\right].$

(f) $f(x,y) = 2(x^2 + y^2 + 1) - (x^4 + y^4)$

$[\text{R.}(0,0)\text{minimo relativo, } (0, \pm 1) \text{ e } (\pm 1, 0), \text{ punti di sella, } (1, \pm 1), \text{ e } (-1, \pm 1)\text{massimi relativi}].$

(g) $f(x,y) = 2(x^4 + y^4 + 1) - (x+y)^2$

$\left[\text{R.}(0,0)\text{Hessiano nullo!, } \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \text{ e } \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \text{minimi relativi}\right].$