Esercizi del corso LM410-Teoremi sulla Logica 1

Esercizi sul Capitolo 2

Esercizio 2.1 (Induzione e buon ordinamento)

Sfruttando il principio del buon ordinamento sugli interi naturali (ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ha un primo elemento rispetto all'ordine su $\mathbb{N}$), dimostrare (in $\mathbb{N}$) le due versioni seguenti del principio di induzione, dove abbiamo indicato (informalmente) con $P(x)$ il fatto che x soddisfa una certa proprietà P (dove x sta per un generico numero intero):

(I1) $(P(0) \wedge \forall z(P(z) \to P(z+1))) \to \forall x P(x)$;

(I2) $(\forall y(\forall z(z < y \to P(z)) \to P(y))) \to \forall x P(x)$.

Esercizio 2.2 (Taglio delle teste dell'Idra)

Se X è un insieme, un multinsieme finito su X è una funzione $\mu : X \to \mathbb{N}$ quasi ovunque nulla, cioè $\mu(a) = 0$ salvo per un numero finito di elementi a di X. Intuitivamente, un multinsieme finito su X è un insieme finito di elementi di X in cui le ripetizioni contano: ad esempio $\mu = [a, b, a, a, a, b, b, c, c, c, d]$ (con $a, b, c \in X$) è il multinsieme finito su X tale che $\mu(a) = 4$, $\mu(b) = 3$, $\mu(c) = 3$, $\mu(d) = 1$ e $\mu(e) = 0$ per ogni $e \in X \backslash \{a, b, c, d\}$. Denotiamo con $[\,] : X \to \mathbb{N}$ il multinsieme vuoto, cioè tale che $[\,](x) = 0$ per ogni $x \in X$. D'ora in poi diremo sempre "multinsieme" in luogo di "multinsieme finito". Nel seguito dell'esercizio, considereremo il caso particolare in cui $X = \mathbb{N}$, cioè multinsiemi di interi naturali, come ad esempio $\mu = [3, 3, 2, 8, 8]$, cioè $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\mu(3) = 2$, $\mu(2) = 1$, $\mu(8) = 2$ e $\mu(i) = 0$ per ogni $i \in \mathbb{N} \backslash \{2, 3, 8\}$.

Chiamiamo Idra un multinsieme su $\mathbb{N}$, e definiamo ora l'operazione consistente nel "tagliare una testa di un'Idra". Intuitivamente, il taglio di una testa di altezza k produce un numero arbitrario di nuove teste, tutte però di altezza strettamente minore di k. Più precisamente, ν è ottenuto tagliando una testa a μ quando esiste un intero k tale che:

- per $i > k$ vale $\mu(i) = \nu(i)$
- $\mu(k) = \nu(k) + 1$.

Lo scopo dell'esercizio è mostrare la terminazione dell'operazione di taglio delle teste di un'Idra.

1. Per un multinsieme non vuoto μ, denotiamo con $h(\mu)$ il suo massimo, cioè $h(\mu) = max\{i \in \mathbb{N} : \mu(i) > 0\}$. Nel caso del multinsieme vuoto (cioè $[\,] : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $[\,](i) = 0$ per ogni $i \in \mathbb{N}$), poniamo $h([\,]) = 0$. Dimostrare, per induzione sulle coppie di interi naturali $(h(\mu), \mu(h(\mu)))$ ordinate lessicograficamente, che è sempre possibile tagliare tutte le teste dell'idra μ, cioè che esiste una maniera di applicare l'operazione di taglio delle teste tale che dopo un numero finito di passi si ottenga un'idra senza teste, ovvero il multinsieme vuoto.
2. Si consideri la seguente relazione $<_m$ tra multinsiemi di interi naturali: $\mu <_m \nu$ quando
   - $\mu = [\,]$ e $\nu \neq [\,]$

   oppure

   - $\mu \neq [\,]$ e $\nu \neq [\,]$ ed esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che
     - $\mu(n) < \nu(n)$;
     - per ogni $m > n$ vale $\mu(m) = \nu(m)$.

Dimostrare che la relazione $<_m$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\mathcal{M}_{fin}(\mathbb{N})$ dei multinsiemi finiti di interi naturali (per ogni multinsieme μ non vale $\mu <_m \mu$, e se μ, ν, ξ sono multinsiemi tali che $\mu <_m \nu$ e $\nu <_m \xi$, allora vale $\mu <_m \xi$)

3. Dimostrare che la relazione $<_m$ è una relazione di buon ordine sull'insieme $\mathcal{M}_{fin}(\mathbb{N})$ (ogni insieme non vuoto di multinsiemi finiti ha un minimo)

4. Dedurre dal punto precedente che non esiste una successione $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ di multinsiemi tale che, per ogni $i \in \mathbb{N}$, vale $\mu_{i+1} < \mu_i$. Concludere che, applicando (in maniera arbitraria) un numero finito sufficientemente grande di volte l'operazione di taglio delle teste a qualunque multinsieme μ, si ottiene il multinsieme vuoto.

Esercizio 2.3 (Assioma di scelta e Lemma di König)

Lo scopo dell'esercizio è introdurre una versione più debole dell'assioma di scelta (l'assioma delle scelte dipendenti) e dimostrare come questa versione sia sufficiente per dimostrare il lemma di König.

Assioma della scelta dipendente: Sia R una relazione binaria sull'insieme non vuoto M. Se per ogni $x \in M$ esiste $y \in M$ tale che $(x, y) \in R$, allora esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di M tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $(x_n, x_{n+1}) \in R$.

1. Dimostrare l'assioma della scelta dipendente assumendo l'assioma di scelta.

2. Dimostrare il lemma di König usando l'assioma della scelta dipendente (adattando leggermente la dimostrazione presente nel libro).