LK Hauptsatz (Gentzen, 1934)

cut rule $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad A, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$ A = cut formula

Definizioni:

- grado di una formula $\partial(A)$:
  - $\partial(A) = 1$ se A è atomica
  - $\partial(\neg A) = \partial(A) + 1$
  - $\partial(A \bullet B) = \max\{\partial(A), \partial(B)\} + 1$ per $\bullet \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$
- grado di una cut-rule è il grado della cut-formula A
- grado di una dimostrazione Π, $d(\Pi)$ è il sup dei gradi dei suoi tagli.
- altezza di una dimostrazione Π, $h(\Pi)$ è l'altezza dell'albero Π.

  se Π è un axioma $\overline{A \vdash A}$ allora $h(\Pi) = 1$

  altrimenti $\Pi: \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ S_1\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_2 \\ S_2\end{matrix}}{S}$ $h(\Pi) = \max\{h(\Pi_1), h(\Pi_2)\} + 1$
- livello di un cut è la somma delle altezze delle sue premesse $h(\Pi_1) + h(\Pi_2)$.
- rango di un cut A è $\langle d(\text{cut}), l(\text{cut}) \rangle$ è la coppia ordinata $\left\{\begin{matrix}\text{grado del cut} \\ \text{e} \\ \text{livello del cut}\end{matrix}\right.$
- rango di una dimostrazione Π è il max dei ranghi dei suoi cut.

Un taglio è logico quando la cut formula è conclusione immediata di una regola logica a destra e a sinistra.

Altrimenti il taglio è strutturale

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \Delta, A}\, r^R_A \qquad \dfrac{\vdots}{A, \Gamma' \vdash \Delta'}\, r^L_A}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ \text{cut logico}$$

The Key Lemma: ogni cut logico può essere ridotto in un passo come segue

- $$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\, \wedge R \qquad \dfrac{\Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma', A \wedge B \vdash \Delta'}\, \wedge_1^L}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ \text{cut}(A \wedge B)$$

si riduce in un taglio di grado minore

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ \text{cut}(A)$$

$d(A) < d(A \wedge B)$

il caso $(\wedge R, \wedge_2 L)$ è analogo (simmetrico)

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, B \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

· caso $(\vee L, \vee_1 R)$

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma, A \vdash \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \Gamma, B \vdash \Delta\end{matrix}}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\,\vee L \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma' \vdash \Delta', A\end{matrix}}{\Gamma' \vdash \Delta', A \vee B}\,\vee_1 L}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,cut(A \vee B)
$$

si riduce come segue con un taglio di grado più piccolo $d(A) < d(A \vee B)$

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma' \vdash \Delta', A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \Gamma, A \vdash \Delta\end{matrix}}{}\,scambio}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}
$$

il caso $(\vee L, \vee_2 R)$ è analogo

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma, A \vdash \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \Gamma, B \vdash \Delta\end{matrix}}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\,\vee L \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma' \vdash \Delta', B\end{matrix}}{\Gamma' \vdash \Delta', A \vee B}\,\vee_1 L}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,cut \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \Gamma' \vdash \Delta', B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \Gamma, B \vdash \Delta\end{matrix}}{\Gamma', \Gamma \vdash \Delta', \Delta}}{\dfrac{scambio}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}}
$$

$\square$

Caso ($\Rightarrow R$, $\Rightarrow L$)

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B}\Rightarrow R \qquad \dfrac{\Gamma' \vdash \Delta', A \qquad B, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma', A \Rightarrow B \vdash \Delta'}\Rightarrow L}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\text{cut}(A \Rightarrow B)$$

si riduce mediante 2 cut di grado più piccolo $d(A), d(B) < d(A \Rightarrow B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta \qquad \Gamma' \vdash \Delta', A}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta', B}\text{cut}(A) \qquad B, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', \Gamma' \vdash \Delta, \Delta', \Delta'}\text{cut}(B)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\text{contraction } L/R$$

CASO $\neg R / \neg L$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\neg R \qquad \dfrac{\Gamma' \vdash \Delta', A}{\neg A, \Gamma' \vdash \Delta'}\neg L}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\text{cut}(A) \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma' \vdash \Delta', A \qquad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma', \Gamma \vdash \Delta', \Delta}\text{cut}(A)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\text{scambio}$$

$d(A) < d(\neg A)$

<u>Principal Lemma</u>: Se C ha grado $d(C) = d$ e Π, Π' sono due dimostrazioni

$\Pi : \Gamma \vdash \Delta$ e $\Pi' : \Gamma' \vdash \Delta'$ di grado $d(\Pi), d(\Pi') < d$

allora possiamo costruire una dimostrazione di

$$\omega : \Gamma, \Gamma' - C \vdash \Delta - C, \Delta' \quad \text{di grado } \partial(\omega) < d.$$

<u>Proof</u>: by induction su $h(\Pi) + h(\Pi')$. (la somma delle altezze di Π e Π').

Nota $\Gamma' - C$ (risp. $\Delta - C$) indica il sequente Γ' (risp Δ) dal quale sono state rimosse (cancellate) tutte le occorrenze di C.

Ragioniamo sulle inferenze r, r' che hanno portato a conclusione Π, Π'

$$\Pi : \frac{\vdots}{\Gamma \vdash \Delta}\, r \qquad\qquad \Pi' \; \frac{\vdots}{\Gamma' \vdash \Delta'}\, r'$$

Analizziamo i vari casi (combinatoria)

· caso Π è un axione $\overline{C \vdash C}$ quindi allora

C è la "cut formula"

$$\frac{\Pi}{\overline{C \vdash C}} \qquad \frac{\Pi'}{\Gamma' \vdash \Delta'}$$

allora $C = \Gamma$ e $C = \Delta$

allora una dimostrazione di $C, \Gamma' - C \vdash \Delta'$ si può costruire da $\Gamma' \vdash \Delta'$ con regole strutturali

$$\omega : \frac{\overset{\Pi'}{\Gamma' \vdash \Delta'}}{C, \Gamma' - C \vdash \Delta'} \text{ scambio + weak + contraction}$$

ovviamente dato che Π' ha per ipotesi grado $d(\Pi') < d$ allora ω avrà grado $< d$.

· se Π è un axione $\overline{D \vdash D}$ con $D \neq C$ allora $D = \Gamma$ e $D = \Delta$

$$\omega \quad \frac{\overline{D \vdash D}}{D, \Gamma' - C \vdash \underbrace{\Delta - C}_{D}, \Delta'} \text{ ind weakening } C/R$$

che ha banalmente grado $d(\omega) < d$.

· i casi quando $\Pi' = \overline{C \vdash C}$ e $\Pi' = \overline{D \vdash D}$ sono analoghi (omessi).

• caso r è una regola strutturale (W, C, S) $\qquad \Delta^*, C = \Delta$

weakening

$$\Pi: \quad \begin{array}{c} \Pi_1 \\ \Gamma \vdash \Delta^* \\ \hline \Gamma \vdash \Delta^*, C \end{array} \, WR \qquad \Pi' : \Gamma' \vdash \Delta'$$

allora per ip ind. su Π_1, Π' $(h_{\Pi_1} + h_{\Pi'}) < h_\Pi + h_{\Pi'}$, abbiamo una dimostraz

$$\omega : \Gamma, \Gamma' - C \vdash \underbrace{\Delta^* - C}_{= \Delta - C}, \Delta' \quad \text{di grado} < d$$

• caso r è una regola strutturale contraction

$$\Pi \left\{ \begin{array}{c} \Pi_1 : \Gamma \vdash \Delta^*, C, C \\ \hline \Gamma \vdash \underbrace{\Delta^*, C}_{\Delta} \end{array} \right. \qquad \Pi' : \Gamma' \vdash \Delta'$$

allora per ip ind su Π_1, Π' $(h_{\Pi_1} + h_{\Pi'}) < h_\Pi + h_{\Pi'}$ $\Rightarrow$ abbiamo una dimostraz

$$\omega : \Gamma, \Gamma' - C \vdash \underbrace{\{\Delta^*, C\}}_{= \Delta - C} - C, \Delta'$$

i casi quando r' è una regola strutturale sono analoghi

• caso in cui r è una regola logica che introduce una formula $F \neq C$ $\quad A\wedge B \neq C$

• caso $\wedge$ $\quad F = A\wedge B$

$$\pi: \dfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ \Gamma \vdash \Delta^*, A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_2 \\ \Gamma \vdash \Delta^*, B\end{matrix}}{\Gamma \vdash \underbrace{\Delta^*, A\wedge B}_{\Delta}} \wedge R \qquad \begin{matrix}\pi' \\ \vdots \\ \Gamma' \vdash \Delta'\end{matrix}$$

$$\underbrace{\{\Delta^*, A\wedge B\}}_{\Delta} - C = \{\Delta^* - C, A\wedge B\} = \Delta - C$$

per ip. ind. su (π_1, π') e (π_2, π') abbiamo $(h_{\pi_1} + h_{\pi'}) < h_\pi + h_{\pi'}$

$(h_{\pi_2} + h_{\pi'}) < h_\pi + h_{\pi'}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\omega_1: \dfrac{\Gamma \vdash \Delta^*, A \qquad \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' - C \vdash \Delta^* - C, \Delta', A} \qquad \omega_2: \dfrac{\Gamma \vdash \Delta^*, B \qquad \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' - C \vdash \Delta^* - C, \Delta', B}}{\Gamma, \Gamma, \Gamma' - C, \Gamma' - C \vdash \Delta^* - C, \Delta^* - C, A\wedge B} \wedge R}{\text{contraction } C/R}}{\Gamma, \Gamma' - C \vdash \underbrace{\Delta^* - C, A\wedge B}_{= \Delta - C}}$$

• gli altri casi $\vee, \Rightarrow$ C/R.

"e i casi analoghi con R" li omettiamo

. Caso in cui entrambe R, R' introducono a R e L rispett. la cut formula C

caso in cui $C = A \wedge B$ (gli altri casi sono simili e li omettiamo).

$$\Pi : \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ \Gamma \vdash \Delta^*, A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_2 \\ \Gamma \vdash \Delta^*, B\end{matrix}}{\Gamma \vdash \underbrace{\Delta^*, A \wedge B}_{\Delta}} \wedge R \qquad \Delta \Rightarrow \Delta - C = \Delta^* - A \wedge B$$

$$\Pi' \dfrac{\begin{matrix}\Pi'_1 \\ \Gamma'_1, A \vdash \Delta'\end{matrix}}{\underbrace{\Gamma'_1, A \wedge B}_{} \vdash \Delta'} \wedge, L \qquad \{\Gamma'_1, A \wedge B\} = \Gamma' \qquad \Gamma' - C = \Gamma'_1 - A \wedge B$$

allora applico l'ipotesi di ind. a

. Π_1, Π' : ottengo una w_1 : $\Gamma, \overbrace{(\Gamma'_1, A\wedge B)}^{\Gamma'} - A \wedge B \vdash \{\Delta^*, A\} - A \wedge B, \Delta'$

. Π_2, Π_1 : ottengo una w_2 : $\Gamma, (\Gamma'_1, A \wedge B) - A \wedge B \vdash \{\Delta^*, B\} - A \wedge B, \Delta'$

. Π, Π'_1 : ottengo una w_3 : $\Gamma, (\Gamma'_1, A) - A \wedge B \vdash \{\Delta^*, A \wedge B\} - A \wedge B, \Delta'$

$$w_1 : \dfrac{\Gamma, \Gamma' - C \vdash \Delta^* - A \wedge B, \Delta', A \qquad w_2 : \Gamma, \Gamma' - C \vdash \Delta^* - A \wedge B, \Delta', B}{\Gamma, \Gamma' - C \vdash \Delta^* - A \wedge B, \Delta', \underline{A \wedge B}} \qquad w_3 : \dfrac{\Gamma, \Gamma' - C, A \vdash \Delta^* - A \wedge B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' - C, \underline{A \wedge B} \vdash \Delta^* - A \wedge B, \Delta'} \Longrightarrow$$

abbiamo ottenuto due dimostrazioni $\Gamma, \Gamma' - C \vdash \Delta - C, \Delta', A \wedge B$ $\qquad \Gamma, \Gamma' - C, A \wedge B \vdash \Delta - C, \Delta'$

queste due dim. hanno un grado più piccolo di d ma una sola occorrenza di $C = A \wedge B$ ~~che~~ allora

possiamo applicare il Key lemma e ridurre il cut $A \wedge B$ ottenendo una con grado $< d$ ■

Proposizione: Se Π è una dimostrazione di un sequente $\Gamma \vdash \Delta$ di grado $d > 0$ allora possiamo costruire una dimostrazione ω di $\Gamma \vdash \Delta$ ma con grado $< d$.

Proof: per induzione sull'altezza h Π. Consideriamo l'ultima regola r di Π.

Ci sono due soli casi.

Caso 1: r non è una cut rule di grado d, Π. $\dfrac{\Pi'}{\Gamma \vdash \Delta} r$ allora per ip. ind. $\exists$ una Π'' con le stesse concl. di Π' ma con grado $< d$ e quindi possiamo concludere con una applicazione di r a Π''

$$\Pi \quad \frac{\Pi''}{\Gamma \vdash \Delta} r$$

Caso 2: r è una cut rule di grado d.

$$\Pi \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad A, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \text{cut}$$

allora possiamo applicare il Lemma Principale e costruire una ω di $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$ di grado $< d$.

Teorema Hauptsatz (Gentzen, 1931).

Iterando la Prop di sopra possiamo trasformare una Π di $\Gamma \vdash \Delta$ di grado d in una ω di $\Gamma \vdash \Delta$ di grado ϕ (cut free).