Cosa possiamo dire ~~di~~ una proposizione come questa

$$27 \times 37 = 999 \quad ?$$

"=" come uguaglianza

"=" le due espressioni denotano la stessa cosa "lo stesso valore di verità":

è vero/falso ?

denotazione/semantica/verità

"=" come $\Rightarrow$ produzione

esiste una procedura ("x") che fa passare da sx a dx.

senso / sintassi / dimostrazioni procedure

La tradizione semantica "vero/falso" che inizia con Frege / Tarski
1848-1925 1902-1983

Semantica delle proposizioni: quando è vera/falsa

Heyting 1898-1980

Semantica delle Dimostrazioni

· Gentzen 1909 - 1945

· Prawitz 1936 -

· Girard 1947 -

Studio delle Dimostrazioni

- quando posso dimostrare A ?
- cosa vuol dire dimostrare A ?

Noi ci occuperemo della Teoria della Dimostrazione

<u>Cos'è una dimostrazione logica?</u>

* Deduzione Naturale { Gentzen 1935, Prawitz 1965 } Teorema di normalizzazione

* Logica classica/intuizionista : Calcolo dei Sequenti (Gentzen 1930)

  * <u>Teorema di Eliminazione dei Tagli</u> (cut-elimination)

<u>Conseguenze</u> * <u>Proprietà della sottoformula</u> (analiticità delle dimostrazioni logiche)

* <u>Logica Lineare</u> (Girard, 1987) → (controllo delle regole strutturali)

  - Calcolo dei Sequenti LL (eliminazione dei tagli)
  - Reti Dimostrative (Proof net)

$D \longrightarrow D$ senza tagli

→ <u>cut-elim.</u> alla base della Programmazione Funzionale

→ <u>cut-free proof search</u> alla base della Programmazione Logica.

<u>Cut Elimination</u> e <u>Focalizzazione</u>.

Natural Deduction intuitionistic fragment $\Rightarrow, \wedge$

sulle denotazione

A	B	$A \wedge B$	vel $A \vee B$	aut $A \oplus B$	$A \Rightarrow B = \cancel{\neg A \vee B}$	$\neg A$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	
1	1	1	1	0	1	

- Tarsky - Frege approccio denotazionale

- senso. - come costruire una dimostrazione / refutazione di A
  - quando è vera A.

. denotazione : vero / falso A

. senso / meaning : dimostrazione A

cos'è una dimostrazione
quando può essere "normale"
cut-free senza circoli viziosi.

Natural Deduction → Calcolo dei Sequenti → Reti dimostrative logica lineare.
Logica intuizionista   logica class.

Deduzione Naturale: frammento minimale $\wedge, \Rightarrow$

- una deduzione è un albero

$$\Pi = \begin{array}{ccc} (A_1) & \cdots & (A_n) \\ & \vdots & \\ & (C) & \end{array}$$

foglie ipotesi/assunzioni

conclusione/radice dell'albero.

le foglie/ipotesi $\begin{cases} \text{attive/vive} \\ \text{scaricate} \end{cases}$

A attiva $\qquad [A]$ scaricata/estinta

- base: A • è un albero, una ded. di A da A.

- passo induttivo: $\begin{array}{c} \delta \; \vdots \\ A \end{array}$ è una ded. di A

introduzione	eliminazione

- regole della $\wedge$ intr

$$\dfrac{\begin{array}{cc} \delta \,\vdots & \vdots\, \gamma \\ A & B \end{array}}{A \wedge B}\, I\wedge \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ A \wedge B\end{array}}{A}\, E_1\wedge \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ A \wedge B\end{array}}{B}\, E_2\wedge$$

premessa principale

- regole delle $\Rightarrow$

$$\dfrac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots\, \delta \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B}\, I\Rightarrow \qquad \dfrac{\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ A & A \Rightarrow B \end{array}}{B}\, E\Rightarrow$$

$[A]$ ipotesi/scarico ipotesi

premessa principale

modus ponens.

~~0, oppure~~ $n \geq 0$ occorrenze di A non scaricate

Normalizzazione

passo di normalizzazione.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta\\ \vdots\\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\,\sigma\\ B\end{array}}{A\Rightarrow B}\,I\Rightarrow}{B}\,E\Rightarrow \qquad \longrightarrow \qquad \begin{array}{c}\delta\\ \vdots\\ A\\ \vdots\\ B\end{array}$$

redex

redex A se è intro. da I e premessa principale della reg. di eliminazione.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\delta\\ \vdots\\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\delta'\\ \vdots\\ B\end{array}}{A\wedge B}\,\wedge I}{A}\,E_1\wedge \qquad \longrightarrow \qquad \begin{array}{c}\delta\\ \vdots\\ A\end{array}$$

redex

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\delta\\ \vdots\\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\delta'\\ \vdots\\ B\end{array}}{A\wedge B}}{B}\,E_2\wedge \qquad \longrightarrow \qquad \begin{array}{c}\delta'\\ \vdots\\ B\end{array}$$

Teorema di Normalizzazione

Data una deduzione δ di A da $\Gamma = A_1 \dots A_n$ posso trasformare δ in una δ' di A da Γ senza redex.

Idea della dimostrazione.

attenzione! la riduzione di un redex può introdurre nuovi redex.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A\Rightarrow B}\,I\Rightarrow \qquad \begin{matrix}\vdots\\ C\end{matrix}}{(A\Rightarrow B)\wedge C}\,I\wedge}{A\Rightarrow B}\,E\wedge \qquad \begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix}}{B}\,E\Rightarrow$$

redex

redex $(A\Rightarrow B)\wedge C$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{A\Rightarrow B}\,I\Rightarrow \qquad \begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix}}{B}\,E\Rightarrow$$

redex $A\Rightarrow B$

la complessità del nuovo redex diminuisce.

redex $(A\Rightarrow B)$ ma di "complessità logica minore"

Complessità logica di A:

$$\begin{cases} \text{se } A \text{ è un atomo} \Rightarrow \mathbb{C}(A)=1 \\ \text{se } \neg A \Rightarrow \mathbb{C}(\neg A) = \mathbb{C}(A)+1 \\ \text{se } A\circ B \Rightarrow \mathbb{C}(A\circ B) = \max\{\mathbb{C}(A),\ \mathbb{C}(B)\}+1 \end{cases}$$

dove $\circ \in \{\wedge, \Rightarrow\}$.

Def: altezza di una der. è l'altezza dell'albero della derivazione

δ A singolo nodo $h_\delta = 1$

$$\frac{\begin{matrix}\delta_1 \\ \vdots\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\ \delta_2\end{matrix}}{A}\ z \implies \max\{h_{\delta_1}, h_{\delta_2}\}+1.$$

Complessità del redex; complessità logica di una derivazione δ è il max delle complessità dei suoi redex, denotata da C_δ

Prova della correttezza per induzione sulla coppia

$$\begin{matrix}\delta \\ \vdots \\ A\end{matrix} \qquad \langle C_\delta, h_\delta\rangle.$$ ind. su ordinamento lexicografico.

se $h_\delta = 1$ è normale e se $C_\delta = 0$ è normale.

• base induzione

passo induttivo:

$$\delta : \quad \dfrac{\begin{array}{c}\sigma_1 \\ \vdots \\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\sigma_2 \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \wedge B} \qquad\qquad \delta : \quad \dfrac{\begin{array}{c}[A] \\ \vdots\, \sigma \\ B\end{array}}{A \Rightarrow B}$$

- se l'ultima regola di δ è una regola di introduzione $\Rightarrow, \wedge$
  per ip. ind. σ_1, σ_2 (σ) sono normali e quindi δ è normale

- se l'ultima regola è una Eliminazione, allora consideriamo due casi:

$$\delta_1 \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\delta_2 \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \wedge B}\, I\wedge}{A}\, E_1\wedge$$

per ip. ind. $\begin{array}{c}\delta_1 \\ \vdots \\ A\end{array}$ è norm e quindi $\delta' : \begin{array}{c}\delta' \\ \vdots \\ A\end{array}$ è normale

1) CASO

altro caso 2)

$$\delta : \dfrac{\begin{matrix}\delta' \\ \vdots \\ A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots\,\sigma \\ B\end{matrix}}{A\Rightarrow B}\,I\Rightarrow}{B}$$

$\Rightarrow$ per ip. ind. sulla compl. log.

non posso fare induzione sull'altezza!

$$x \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \vdots \\ A \;? \\ \vdots\,\sigma \\ B \end{matrix} \right.$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A\Rightarrow B}\,I\Rightarrow}{\begin{matrix}B \\ \vdots \\ C\end{matrix}}$$

$\rightarrow$ è un nuovo redex ma la sua complessità logica è

$$\mathcal{C}(A\Rightarrow B) < \mathcal{C}((A\Rightarrow B)\Rightarrow C)$$

quindi ipt. ind. è soddisfatta.

non può fare ind su h x ma sulla complessità logica? perché aver introdotto un redex

- $\begin{matrix}\delta_1 \\ \vdots \\ A\end{matrix}$ è normale per h_δ min
- $\begin{matrix}A \\ \vdots\,\sigma \\ B\end{matrix}$ è normale per h_δ –

quindi l'unico redex può essere A ma di complessità più piccola!

esempio:

ipotesi

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A\end{matrix} \qquad [A\Rightarrow B]}{B}\,E\Rightarrow \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{(A\Rightarrow B)\Rightarrow C}\,I\Rightarrow \qquad \dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A\Rightarrow B}\,I\Rightarrow}{C}\,E\Rightarrow$$

redex $(A\Rightarrow B)\Rightarrow C$

si riduce in:

Conseguenze della normalizzazione: Proprietà della sottoformula

Teorema: se δ è una deduzione normale di A da Γ allora: (1) ogni formula che compare nella ded. δ è sottoformula della conclusione A oppure di una delle ipotesi vive di Γ.

(2) Se δ termina con regole di eliminazione allora esiste un cammino principale $A_0, A_1 \ldots A_n$ t.c.

- A_0 è una ipotesi viva $\quad A_0 \in \Gamma$
- A_n è la concl. di $\delta \quad A_n = A$
- A_n è sottoformula di A_0
- $\forall i = 0, \ldots, n-1 \quad A_i$ è la premessa principale e A_{i+1} la conclusione di una regola di eliminazione

$$\frac{A_i \qquad C}{A_{i+1}}\, E$$

A_i è premessa principale di una regola di eliminazione

esempio:

$$\delta : \frac{A_i = B \wedge C}{A_{i+1} = B}\, E\wedge_1 \qquad \delta : \frac{A_i = B \Rightarrow C \qquad B}{A_{i+1} = C}$$

- Proof per ind. su h_δ sulla size di δ_A.

- se $\delta_{\cancel{A}}$ termina con una regola di introduzione

$$\delta \quad \dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \Rightarrow B}\, I\Rightarrow \qquad \text{opp.} \qquad \delta \quad \dfrac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots\\ A & & B\end{matrix}}{A \wedge B}$$

allora per ip. ind. vale la P.S.F. per $\begin{matrix}\vdots & \vdots\\ A & B\end{matrix}$ quindi vale per δ.

- altrimenti se δ termina con una regola di eliminazione, come ad esempio:

$$\delta \text{ normale: } \quad \dfrac{\begin{matrix}\delta' & & \delta''\\ \vdots & & \vdots\\ A \Rightarrow B & & A\end{matrix}}{B}\, E\Rightarrow$$

la premessa principale $A \Rightarrow B$ non può essere la concl. di una regola di intr. perché la δ è per ip. t. normale (senza redex). quindi posso appl. l'ip. ind. a δ' (e δ'') quindi $A \Rightarrow B$ è concl. di una regola di elim. oppure è un'ipotesi $\Rightarrow$ $\exists$ un cammino principale per cui vale la pp. (2) e quindi per δ vale anche la (2)

esisterà un cammino principale con concl. $A \Rightarrow B$

$\Rightarrow$ C: $A_0 \ldots A \Rightarrow B$

$\Rightarrow$ C': $A_0 \ldots A \Rightarrow B, B$ è un cammino principale in δ

Estendiamo il frammento minimale $\wedge, \Rightarrow$ al frammento intuizionista $\vee, \neg$

- la negazione $\neg A = A \Rightarrow \bot$ dove $\bot$ è il simbolo dell'assurdo

  $\bot$ non è derivabile (senza ipotesi)

$$\dfrac{A \qquad A \Rightarrow \bot}{\bot}\, E\Rightarrow$$

- $$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \bot\end{matrix}}{C}\, E\bot$$ ex falso, quodlibet

Riduzione dei redex. $\dfrac{I\blacksquare}{E\blacksquare}$

- regole della disgiunzione.

  introduzione $\vee$

$$\dfrac{A}{A \vee B}\, I_1\vee \qquad \dfrac{B}{A \vee B}\, I_2\vee$$

  eliminazione $\vee$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A \vee B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A]\\ \vdots\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\, E\vee$$

- per $\bot$ non ci sono regole perché non $\exists$ le reg. di intr. del $\bot$

- per le $\vee$.

$$\delta\ \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\varphi\ \vdots\\ A\end{matrix}}{A \vee B}\, I\vee \qquad \begin{matrix}[A]\\ \vdots\,\gamma\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ \vdots\,\sigma\\ C\end{matrix}}{C}\, E\vee \longrightarrow \text{riduce} \qquad \delta' : \begin{matrix}\varphi\ \vdots\\ A\\ \vdots\\ C\end{matrix}$$

Problemi:

* Problemi con la proprietà delle sottoformule.

* non c'è relazione tra $A \vee B$ e C

Problema con la Proprietà delle sottoformule per il frammento completo intuizionista $\{\wedge, \Rightarrow, \vee, \neg\}$

è una deduzione normale?

$$\delta : \quad \dfrac{\begin{matrix} \vdots \\ A \vee A \end{matrix} \qquad \dfrac{[A] \quad [A]}{A \wedge A}\, I\wedge \qquad \dfrac{[A] \quad [A]}{A \wedge A}\, I\wedge}{\dfrac{A \wedge A}{A}\, E_1\wedge}\, E\vee$$

scarica tutte le ipotesi use A

Problema:

ho una deduzione δ normale di A da $A \vee A$ ma ci sono delle occorrenze di formule $(A \wedge A)$ che non sono sottoformule né delle ipotesi né della conclusione.

Ho

Soluzione: commutare le regole di $E\vee$ quanto più porta verso il problema delle deduzioni

$$\dfrac{A \vee A \qquad \dfrac{\dfrac{[A] \quad [A]}{A \wedge A}\, I\wedge}{A}\, E\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{[A] \quad [A]}{A \wedge A}\, I\wedge}{A}\, E\wedge}{A}\, E\vee \quad \xrightarrow{\text{riduce}} \quad \dfrac{A \vee A \quad [A] \quad [A]}{A}\, E\vee$$

ho quindi una ded. δ' di A da $A \vee A$ che soddisfa la prop. delle sottoformule

Commutare le $\vee$ pone altri problemi:

1) occorre verificare che le commutazioni non "blocchi" le riduzioni

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\delta'\\ \vdots\\ A\end{array}}{A\vee B}\,\vee I \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\, x\\ D\end{array}}{C\to D}\,I{\Rightarrow} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[B]\\ \vdots\,\sigma\\ D\end{array}}{C\to D}\,I{\Rightarrow}}{C\to D}\,E\vee \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ C\end{array}}{D}\,E{\Rightarrow}$$

commuta $\Rightarrow$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A\end{array}}{A\vee B} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\, x\\ D\end{array}}{C\to D}\,I{\Rightarrow} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ C\end{array}}{D}\,E{\Rightarrow} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[B]\\ \vdots\,\sigma\\ D\end{array}}{C\to D}\,I{\Rightarrow} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ C\end{array}}{D}\,E{\Rightarrow}}{D}\,E\vee$$

$\Downarrow\Downarrow$ 2 riduzioni

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\delta'\\ \vdots\\ A\end{array}}{A\vee B}\,I\vee \qquad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots\, x\\ D\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots\,\sigma\\ D\end{array}}{D}\,E\vee$$

riduce $\Downarrow$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\delta'\\ \vdots\\ A\\ \vdots\, x\\ D\end{array}}{C\to D}\,I{\Rightarrow} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ C\end{array}}{D}\,E{\Rightarrow}$$

riduce $\Rightarrow$

$$\begin{array}{c}\delta'\\ \vdots\\ A\\ \vdots\, x\\ D\end{array} \qquad \begin{array}{c}\delta'\\ \vdots\\ A\\ \vdots\, x\\ D\end{array}$$

riduce

converge!

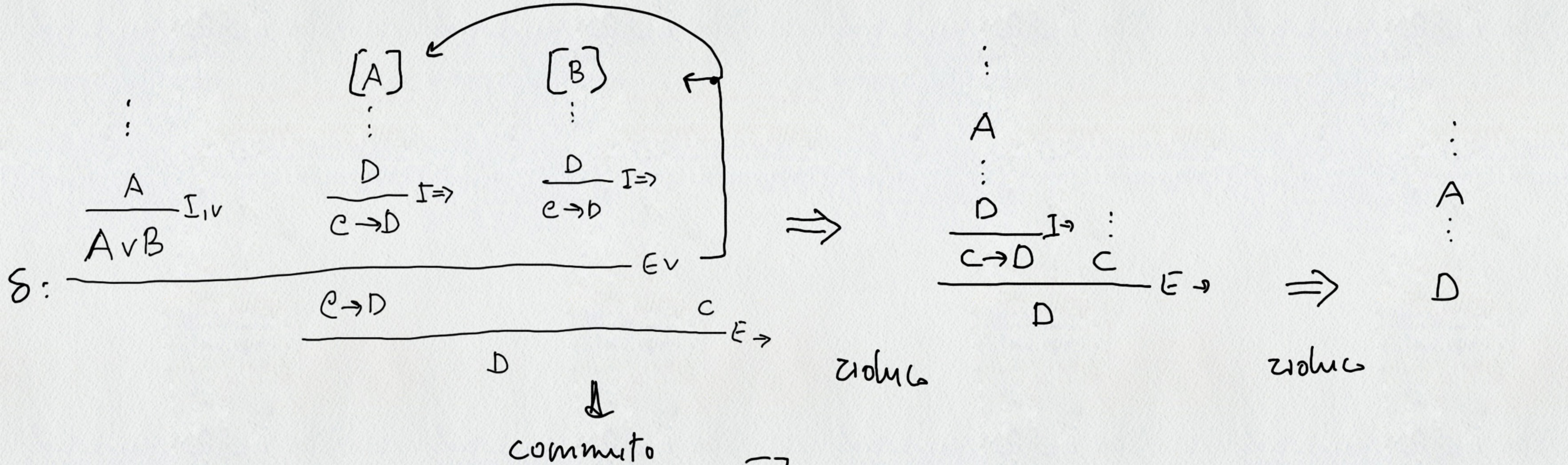
canonicità delle prove:

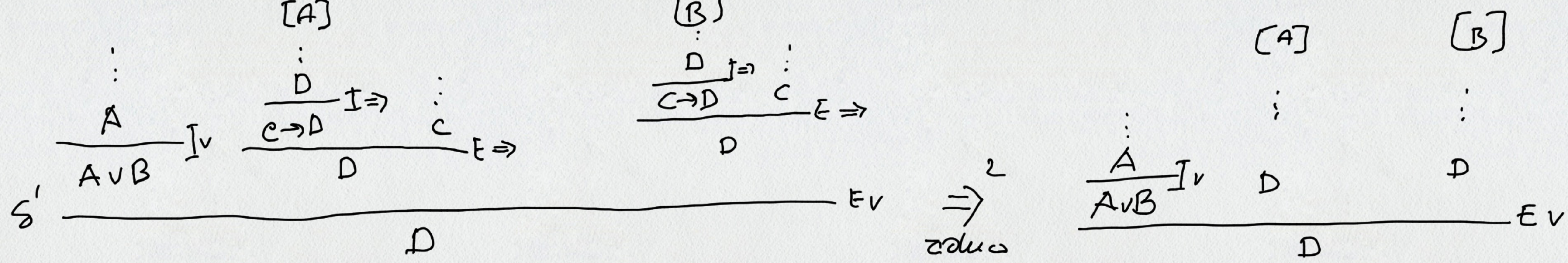
2) Problema

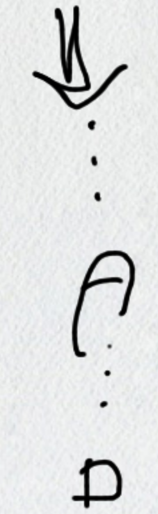
La deduzione naturale non è un oggetto "unitario" per le dimostrazioni perché non "quoziente" sufficientemente le vere dimostrazioni.

$\Sigma \equiv \Sigma'$ per riduzione

qual'è l'oggetto canonico? ...







ma la commutazione dice che:

S e S' sono due dim. equivalenti

e quindi quale dei due è l'oggetto canonico della classe di equivalenza? l'oggetto canonico è la "vera dimostrazione" → verso la logica lineare.

le due strategie convergono!