Proprietà Sottoformule D.N. $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg\}$

Conseguenze della normalizzazione (Teorema).

δ di A da Γ $\Rightarrow$ $\exists$ una δ' di A da Γ senza redex !

procedura effettiva

$$\delta \quad \begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\end{matrix} \quad \xrightarrow{\text{normale}} \quad \delta' \quad \begin{matrix}\Gamma\\ \vdots\\ A\end{matrix} \quad \xRightarrow{\text{albero}}$$

ogni formula che appare in δ' è sottoformula:
- o di qualche ipotesi $A_1 \ldots A_n$ di Γ
- oppure sottoformula della conclusione A

senza redex

sottoformule

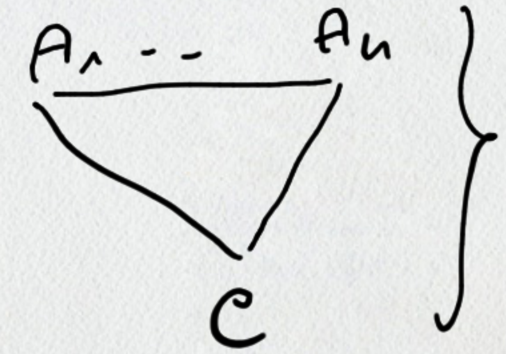
$F = A \,\square\, B \qquad \square \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$

$F = \neg A$

sottoformula di F

$LJ = \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg\}$ Calcolo dei Sequenti per Logica Intuizionista

sequente S: $\underbrace{A_1, \ldots A_{n \geq 0}}_{\substack{\text{ipotesi} \\ \text{sinistra}}} \vdash \overset{\emptyset}{\underset{\substack{\text{conclusione} \\ \text{destra}}}{B}}$ al massimo 1 formula a destra



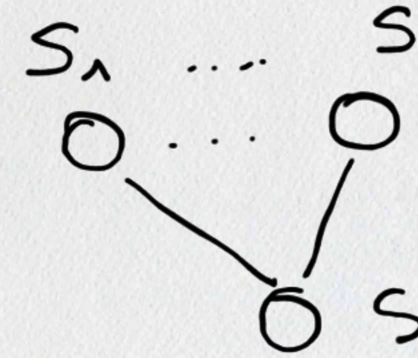
δ

oggetti primitivi "derivazioni"

sequente $\Gamma \vdash B$

$\Gamma = A_1, \ldots, A_{n \geq 0}$ B singola formula

alberi



di derivazione

Regole di inferenza

premessa 1 premessa n

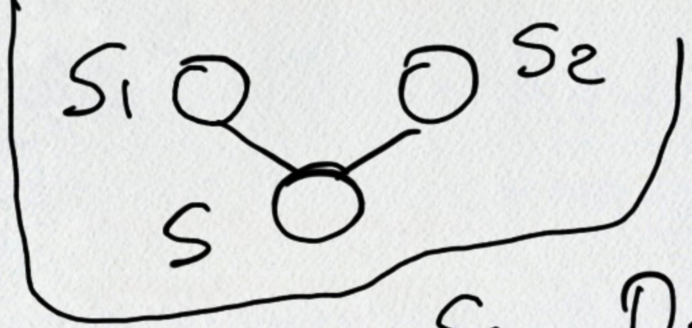
$$\frac{S_1 \ldots S_n}{S}\, R$$

conclusione

$\vdash$

$$S = \underbrace{\Gamma}_{A_1 \ldots A_n} \vdash B$$

Regole di identità e strutturali



regola binaria

Gentzen 1935

id $\dfrac{\text{no premesse}}{A \vdash A}$ ax

$\circ \Rightarrow \circ$

$1 \quad 1$

foglia

$$\dfrac{\overset{S_1 \quad D_1}{\Gamma \vdash A} \qquad \overset{S_2 \quad D_2}{A, \Delta \vdash B}}{S: \quad \Gamma, \Delta \vdash B}\ \text{cut / chain}$$

$\delta_1 \begin{cases} \Gamma \\ \vdots \\ A \end{cases} \qquad \begin{rcases} A, \Delta \\ \vdots \\ B \end{rcases} \delta_2$

$f \circ g$

$\overline{\qquad} \bullet A$

Regole strutturali unarie

perm / scambio

$$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\sigma(\Gamma') \vdash A}$$

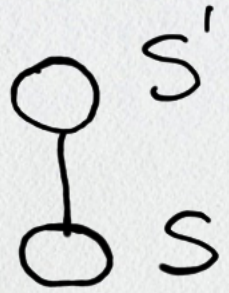
permutazione

Logica commutativa

$$\dfrac{\Gamma', B, C \vdash A}{\Gamma', C, B \vdash A}\ \text{scambio}$$

$$\dfrac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ C$$

contrazione



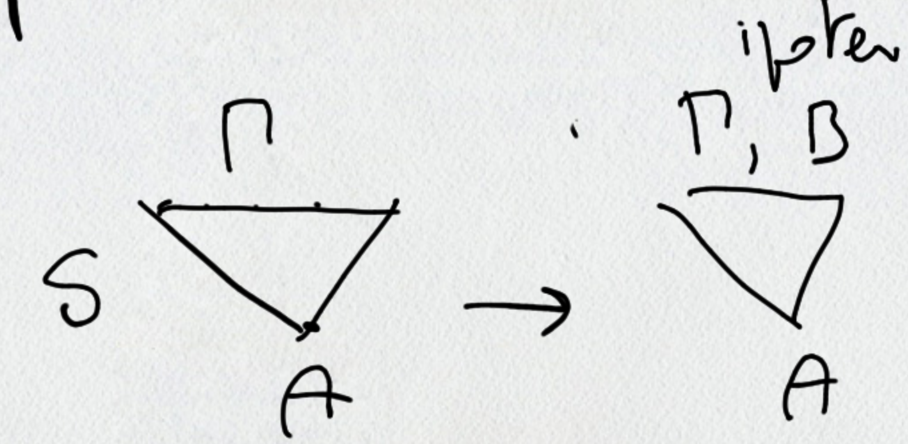
regole unarie

$$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}$$

weakening

indebolimento

W_L



$$\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}\ W_R$$

$\vdots$

$$\dfrac{\bot}{A}$$

Regole logiche $(\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg)$

Regole congiunzione

$$\frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\ \wedge L_1 \qquad\qquad \frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\ \wedge L_2$$

$$\delta \begin{array}{c} \Gamma, A \\ \vdots \\ C \end{array} \rightarrow \delta' \begin{array}{c} \Gamma, \dfrac{A \wedge B}{A}\, E_1\wedge \\ \vdots \\ C \end{array} \qquad\qquad \delta \left\{ \begin{array}{c} \Gamma, B \\ \vdots \\ C \end{array} \right. \longrightarrow \begin{array}{c} \Gamma, \dfrac{A \wedge B}{B}\, E_2\wedge \\ \vdots \\ C \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge R \qquad\qquad \delta: \frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ A \end{array}\ \delta_1 \qquad \delta_2\ \begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \wedge B}\ I\wedge$$

Regole della disgiunzione $\vee$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, \underline{A \vee B} \vdash C}\, \vee_L \qquad \alpha \qquad \delta$$

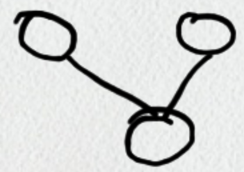
$$\dfrac{\overset{\text{ipVei'}}{A \vee B} \qquad \begin{matrix}\Gamma, \boxed{A} \\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma, \boxed{B} \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\, E\vee$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\, \vee R_1 \iff \dfrac{\left.\begin{matrix}\Gamma \\ \vdots \\ A\end{matrix}\right\}\delta'}{A \vee B}\, I_1\vee$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\, \vee R_2 \iff \dfrac{\delta'\left\{\begin{matrix}\Gamma \\ \vdots \\ B\end{matrix}\right.}{A \vee B}\, \delta$$

Regole dell'implicazione

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, \underline{A \Rightarrow B} \vdash C} \Rightarrow L$$



ded. nat.

$$\frac{\begin{matrix}\Gamma \\ \vdots \\ A\end{matrix} \qquad \overset{\text{iprev}}{A \Rightarrow B}}{\begin{matrix}B, \Gamma \\ \vdots \\ C\end{matrix}} \quad \delta$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow R$$

$$\frac{\left.\begin{matrix}\Gamma, [A] \\ \vdots \\ B\end{matrix}\right\} \delta}{A \Rightarrow B} \; I\Rightarrow$$

Regole della negazione

$$\neg A \underset{def.}{=} A \Rightarrow \bot$$

"$\bot$" bottom, assurdo

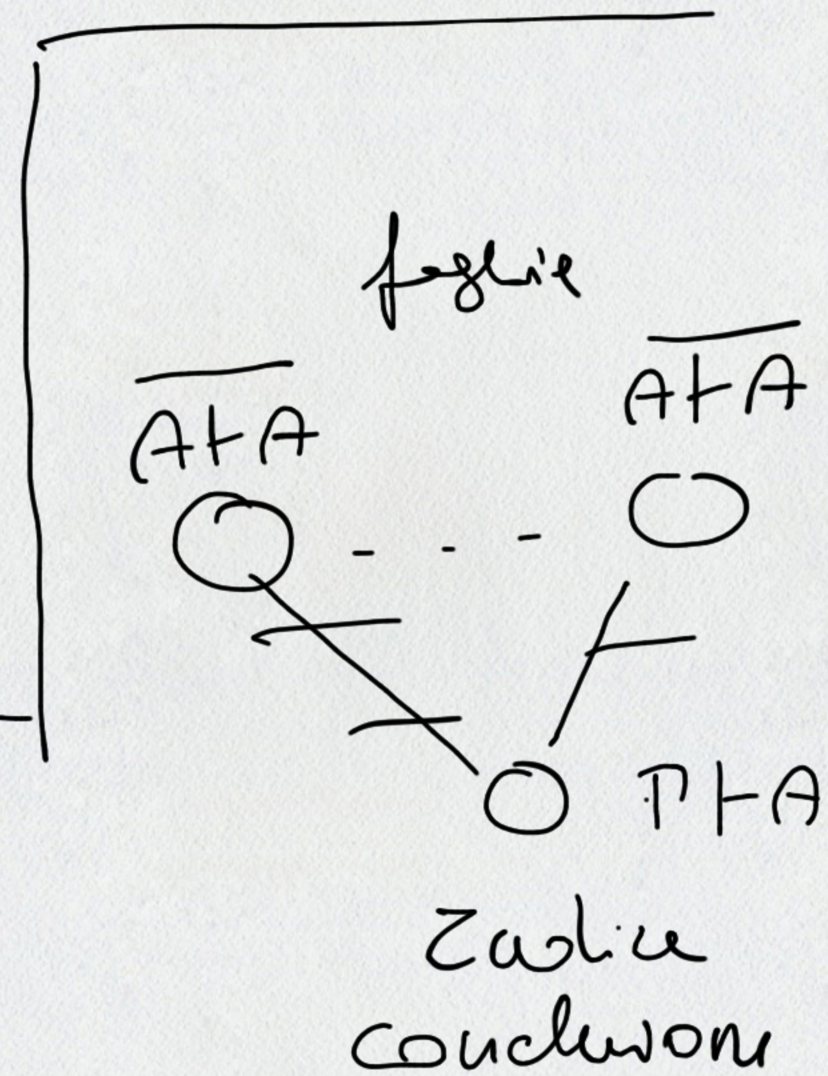
$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash}\ \neg L$$

$$\frac{\left.\begin{matrix}\Gamma \\ \vdots \\ A\end{matrix}\right\}\delta \qquad \neg A = A \Rightarrow \bot}{\bot}\ MP/E\Rightarrow$$

modus ponens
elim. $\Rightarrow$

$$\frac{\Gamma, A \vdash}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg R$$

$$\frac{\left\{\begin{matrix}\Gamma, [A] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}\right.}{\neg A \underset{def.}{=} A \Rightarrow \bot}\ I\Rightarrow$$



$\Gamma \vdash A$

- ogni derivazione in LJ è un albero

- siccome in LJ abbiamo solo regole di introduzione L/R allora il calcolo è "costruttivo"

limiti di LJ

R.A.A

Classico

$$\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash}{\Gamma \vdash A}\ \text{RAA}$$

$$\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash}{\Gamma \vdash \neg\neg A}\ \neg R$$

$\neg\neg A \overset{?}{=} A$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{sì.} & A \vdash \neg\neg A \\ \text{NO.} & \neg\neg A \vdash A \end{array}\right\} \Rightarrow A \dashv\vdash \neg\neg A$$

$\equiv$

Principio del 3° escluso $\vdash A \vee \neg A$ in LJ ? NO

RAA $\equiv$ 3° excl.

$$\left.\begin{array}{c} \Gamma, \neg A \vdash \\ \vdots \\ \hline \Gamma \vdash A \end{array}\right\}\text{RAA.}$$

in LJ

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\end{array}}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}$$

$$\dfrac{A \equiv \neg\neg A}{\text{in LJ}}$$

assumiamo RAA

deriviamo il 3° excl

$\emptyset \vdash A \vee \neg A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash}{\Gamma, \neg A \vdash A}\ \text{wR} \qquad \dfrac{A \vdash A}{\Gamma, A \vdash A}\ \text{w}^n\text{L}}{\Gamma, A \vee \neg A \vdash A}\ \vee L \qquad \begin{array}{c}\text{3° escluso}\\ \text{assunzione}\\ \vdash A \vee \neg A\end{array}}{\Gamma \vdash A}\ \text{cut}$$

3° escluso $\Rightarrow$ RAA

in LJ

$$\dfrac{\cancel{\vdash} A, \neg A \ \text{in LJ no!}}{\boxed{\neg\neg A \vdash A\ ?}}$$

in LJ ? –

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A \vdash A \vee \neg A}\ \vee_1 R}{\neg(A \vee \neg A), A \vdash}\ \neg L}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A}\ \neg R}{\neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A}\ \vee_2 R}{\neg(A \vee \neg A), \neg(A \vee \neg A) \vdash}\ \neg L}{\neg(A \vee \neg A) \vdash}\ \text{CL}}{\vdash A \vee \neg A}\ \text{RAA}$$

$$\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\neg A, A \vdash}\ \neg L}{A \vdash \neg\neg A}\ \neg R$$

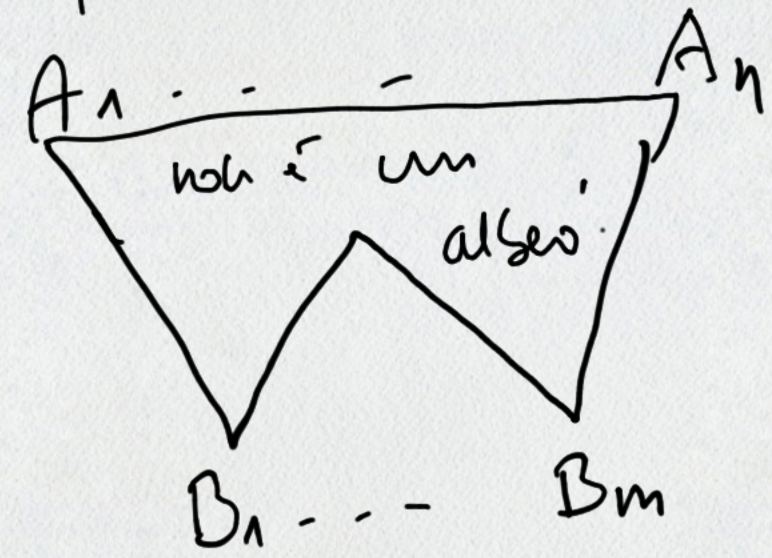
in LJ

$A \vdash \neg\neg A$

è dim.

Logica Classica: calcolo dei sequenti LK

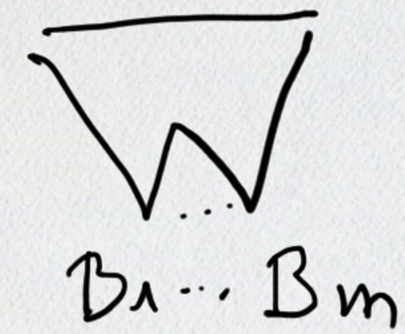
sequente LK $\quad \Gamma \vdash \Delta$



$$A_1, \ldots A_{n \geq 0} \vdash B_1, \ldots, B_{m \geq 0}$$

$$\equiv$$

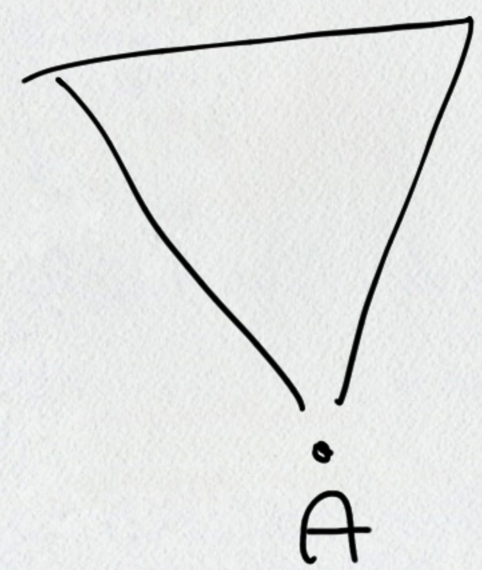
$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \vdash B_1 \vee \ldots \vee B_m$$



virgola "," a sinistra significa $\wedge$ and

virgola "," a destra significa $\vee$ OR

$$\Gamma \vdash \Delta \overset{?}{\Longrightarrow}$$



DN

LK Regole del calcolo

Identità

$$\frac{}{A \vdash A}\,ax$$

cut

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,cut$$

Strutturale

scambio

$$\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash \Delta}\,Ex\,L \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Delta'}\,Ex\,R$$

commut.

contrazione

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\,C_L \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\,C_R$$

indebolimento

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\,W_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\,W_R$$

Congiunzione:

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge_1 L \qquad \dfrac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge_2 L \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ \wedge R$$

Disgiunzione:

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee L \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee_1 R \qquad \dfrac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee_2 R$$

Implicazione:

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ \Rightarrow L \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}\ \Rightarrow R$$

Negazione:

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg L \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg R$$

il 3° escluso $A \vee \neg A$ è derivabile in LK

1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{\vdash A, \neg A}\,\neg R}{\vdash A \vee \neg A, \neg A}\,\vee_1 R}{\vdash A \vee \neg A, A \vee \neg A}\,\vee_2 R}{\vdash A \vee \neg A}\,\text{Contr.}$$

3° escluso

doppia negazione è involutiva

$\neg\neg A = A$ in LK.

2. $A \vdash_{LK} \neg\neg A$

3. $\neg\neg A \vdash_{LK} A$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{\neg A, A \vdash}\,\neg L}{A \vdash \neg\neg A}\,\neg R$$

in LK, LJ

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{\vdash A, \neg A}\,\neg R}{\neg\neg A \vdash A}\,\neg L$$

solo in LK, no, in LJ!

4. RAA in LK

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash}{\Gamma \vdash \neg\neg A}\,\neg R \qquad \neg\neg A \vdash A}{\Gamma \vdash A}\,\text{cut}$$

RAA $\quad \dfrac{\Gamma, \neg A \vdash}{\Gamma \vdash A}\,\text{RAA.}$

Verso l'eliminazione del Taglio in LK

- osservazione: le regole di LK/LJ permettono unicamente di introdurre connettivi, mai di eliminarli (ad ecc. del cut)

ausiliarie

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}$$

principale

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ \vee, R$$

formula ausiliaria

formula principale della inferenza $\vee, R$

contesto dell'inferenza

le formule in Γ, Δ si chiamano parametri

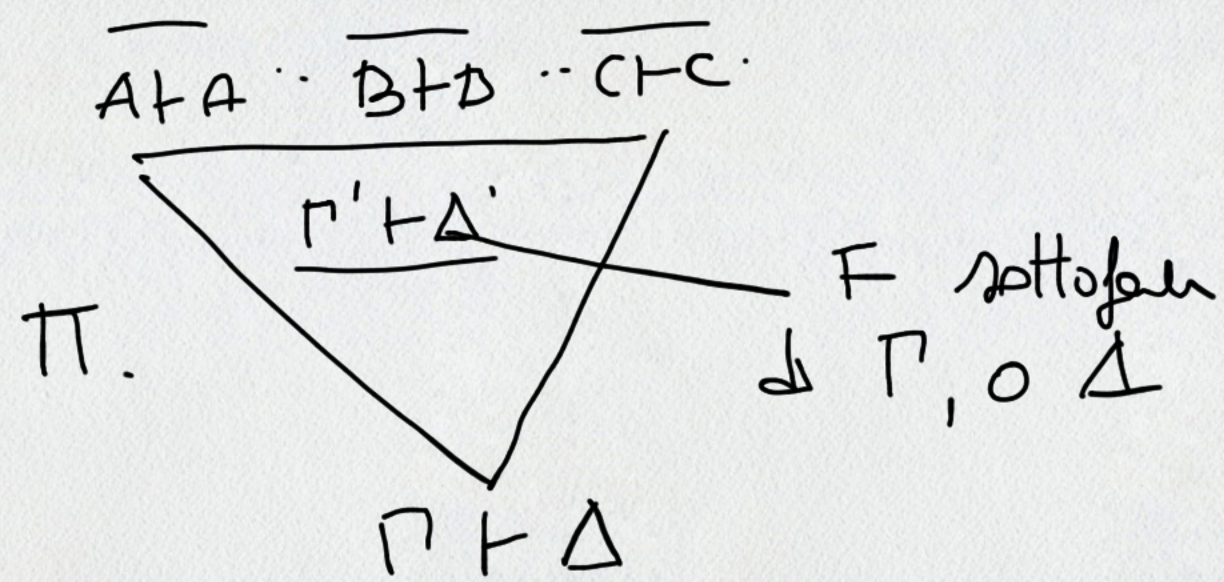
Teorema (Gentzen's Hauptsatz) 1934 Eliminazione dei tagli

La regola del taglio (cut) è eliminabile dal sistema LK, ovvero per ogni sequente $\Gamma \vdash \Delta$ dimostrabile in LK è possibile ottenere in (modo effettivo (algoritmico)) una nuova dimostrazione
Procedura
dello stesso sequente $\Gamma \vdash \Delta$ che non contiene alcuna istanza (o applicazione) della regola del taglio (cut).

$$\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \Gamma \vdash \Delta \end{array} \leadsto \begin{array}{c} \mathcal{D}' \\ \Gamma \vdash \Delta \end{array} \text{ senza tagli}$$

Conseguenze Proprietà delle Sottoformule

Se Π è una dimostrazione di $\Gamma \vdash \Delta$ senza tagli (normali / cut-free) allora ogni formula che appare in un sequente di Π è sottoformula di qualche formula in Γ oppure Δ



Conseguenze delle sottoformule

LK è consistente

$$\dfrac{\begin{array}{c} A \vdash A \\ \vdots \\ ? \end{array}}{A_1 \ldots A_n \vdash B_1 \ldots B_m}$$

$$\begin{array}{c} A \vdash A \\ \vdots \\ \vdash \bot \end{array}$$

$$\dfrac{\vdash A \qquad A \vdash}{\vdash}\,cut$$

$$\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \vdash \underline{A} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \dfrac{A \vdash}{\vdash \underline{\neg A}}\,\neg R \end{array}$$

$$\dfrac{\vdash A \quad \vdash \neg A}{\vdash A \wedge \neg A}$$

$\bot$ = principio contraddizione

focalizzazione

ricerca normalizzatore delle dimostrazioni

. Elim. du Tagl. $\exists\ \delta \vdash \bot$

. proof search ricerca automatica delle dimostrazioni

domande? $\overline{\Gamma \vdash \Delta}^{\,2}$ è dim. in LK ?