Vincent Danos 1990

. SP
. SPC
. SPA
. PSPA
. PSPAE
. GC
. RP

Enrico Bertolotti - MLL PS

Chapitre 3.

Les réseaux multiplicatifs.

1

Abréviations

ABRÉVIATIONS. On abrègera dans ce chapitre structure de preuve multiplicative en SP, structure de preuve multiplicative sous forme concrète (resp. abstraite) en SPC (resp. SPA), pré-structure de preuve multiplicative sous forme abstraite en PSPA, pré-structure de preuve multiplicative sous forme abstraite étiquetée en PSPAE, graphe de correction multiplicatif en GC, et enfin réseau de preuve multiplicatif en RP.

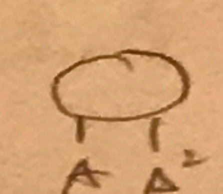
3.1. Structures de preuve. Formes abstraites et concrètes.

Commençons par définir la forme concrète des SP.

Définition 3–1. *Nous définissons inductivement "S est une SPC dont les conclusions sont $X_1, \ldots, X_n$", où $X_1, \ldots, X_n$ sont dans $\mathcal{F}_m$.* SPC

Links *1. Lien* **ax**. *Pour toute formule multiplicative A*

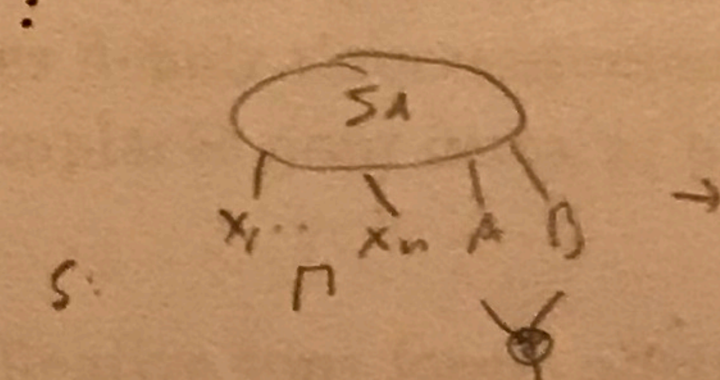
$$\frac{}{A \quad A^\perp}$$



est une SPC dont les conclusions sont $A, A^\perp$.

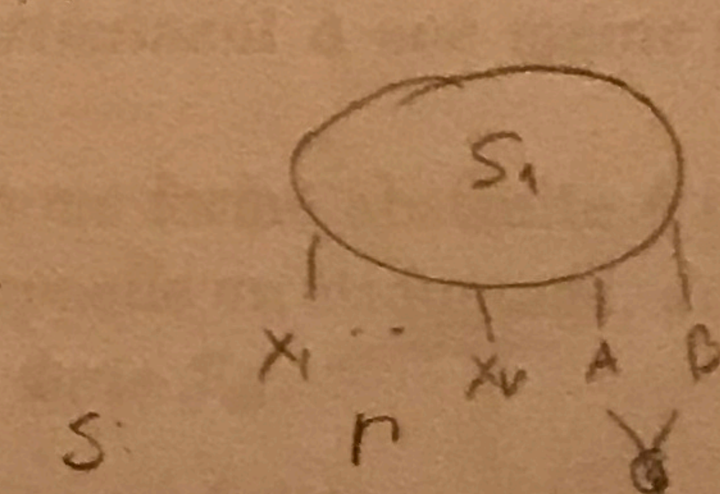
2. Lien **par**. *Si S_1 est une SPC dont les conclusions sont $X_1, \ldots, X_n, A, B$, alors S est une SPC dont les conclusions sont $X_1, \ldots, X_n, A \wp B$, où S est :*

$$\begin{array}{c} S_1 \\ \vdots \\ \dfrac{A \quad B}{A \wp B} \end{array}$$



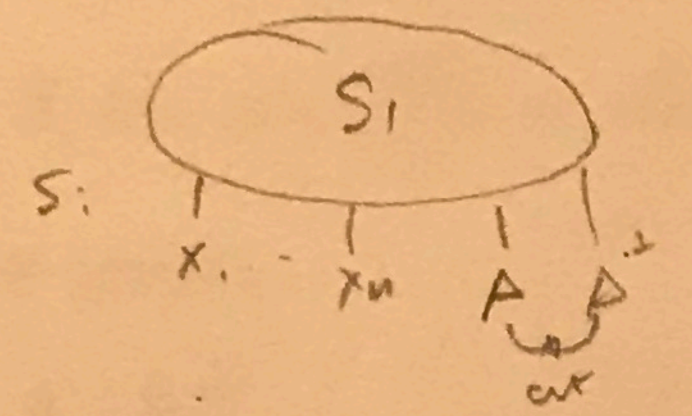
3. Lien **fois**. *Si S_1 est une SPC dont les conclusions sont $X_1, \ldots, X_n, A, B$, alors S est une SPC dont les conclusions sont $X_1, \ldots, X_n, A \otimes B$, où S est :*

$$\begin{array}{c} S_1 \\ \vdots \\ \dfrac{A \quad B}{A \otimes B} \end{array}$$

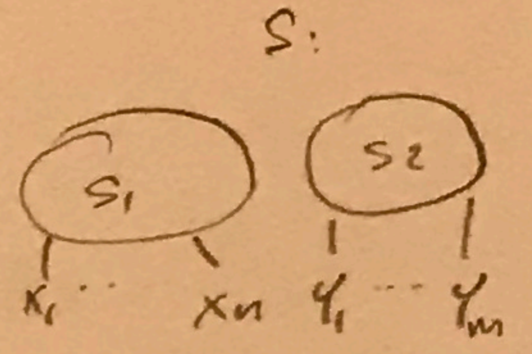


4. Lien **cut**. *Si S_1 est une SPC dont les conclusions sont $X_1, \dots, X_n, A, A^\perp$, alors S est une SPC dont les conclusions sont $X_1, \dots, X_n$, où S est :*

$$\begin{array}{c} S_1 \\ \vdots \\ \underline{A \quad A^\perp} \end{array}$$



5. Mix ou juxtaposition. Si S_1 (resp. S_2) est une SPC dont les conclusions sont $X_1, \dots, X_n$ (resp. $Y_1, \dots, Y_m$), alors la juxtaposition de S_1 et S_2 est une SPC dont les conclusions sont $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$.



Dans cette forme concrète des SP, les liens sont représentés par des traits horizontaux. Nous appellerons, par analogie avec les systèmes de déduction, *conclusion(s) (resp. prémisse(s))* d'un lien la (les) formule(s) directement au-dessous (resp. au-dessus) du trait correspondant au lien. Nous appellerons *conclusions (resp. formules de coupure)* d'une SP les formules de celle-ci qui ne sont prémisses d'aucun lien (resp. qui sont prémisses d'un lien coupure), et *formules terminales* les formules de celle-ci qui sont conclusions ou formules de coupure. SP

Remarque. On peut se reposer de la définition ci-dessus en tâchant de décrire moins formellement les SPC. Ce sont des assemblages de liens choisis parmi :

$$\overline{A \quad A^\perp} \qquad \frac{A \quad B}{A \wp B} \qquad \frac{A \quad B}{A \otimes B} \qquad \underline{A \quad A^\perp}$$

La définition qui précède assure que ceux-ci vérifient que : toute formule est conclusion d'un lien exactement, toute formule est prémisse d'un lien au plus, la clotûre transitive de la relation "X est conclusion d'un lien dont Y est prémisse" est un ordre.

Nous ferons libre usage dans la suite d'expressions du genre "un lien (ou une formule) au-dessous (ou que surmonte) un lien (ou une formule)" sans les définir rigoureusement.

Il se trouve que cette forme concrète est avantageusement remplacée pour certains problèmes par la forme abstraite, qu'on définit maintenant.

Définition 3–2. *On appellera* pré-structure de preuve multiplicative sous forme abstraite *tout graphe non-orienté S, muni d'un ensemble $C(S)$ de paires deux à deux disjointes d'arêtes coïncidentes*[1]. *On appellera simplement* paires *ces paires d'arêtes et* base d'une paire *le sommet de coïncidence de ses deux arêtes (si ces arêtes coïncident en leurs deux extrémités, n'importe laquelle fera l'affaire). De deux arêtes qui appartiennent à une même paire, nous dirons qu'elles sont* appariées.

Puis on appellera pré-structure de preuve multiplicative sous forme abstraite étiquetée *une PSPA munie de surcroît d'une application partielle, qu'on appelle un* étiquetage, *de l'ensemble de ses sommets*[2] *de degré ≤ 1, qu'on appelle* conclusions, *dans $\mathcal{F}_m$.*

---

[1] Deux arêtes sont dites coïncidentes si elles partagent au moins une extrémité.

[2] Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes en ce sommet.

déf. alternative "non-inductive"
dummy link
conclusion
ordre prémisse conclusion
$S = \langle V, E, C(S) \rangle$
pairs
PSPA
PSPAE
$\mathcal{E} : V^1 \to \mathcal{F}_{MLL}$
partielle
au-dessous = sotto
au-dessus = sopra

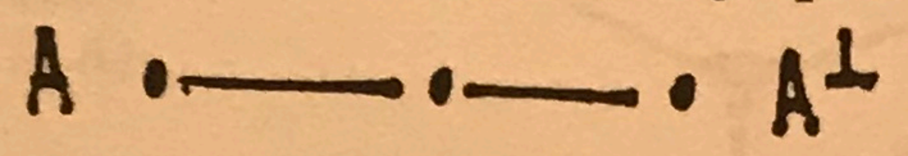
no! α & β non non disjointe

α & β disjoints

On convient de représenter graphiquement l'étiquetage d'une PSPAE par un étiquetage (!) et chacune de ses paires par un trait liant les deux arêtes de la paire.

Définition 3–3. *Soit S une PSPAE. On dira que S est une SPA si elle a été produite par l'application répétée des règles suivantes :* SPA

1. Lien **ax**. *Pour toute formule multiplicative A, le graphe*

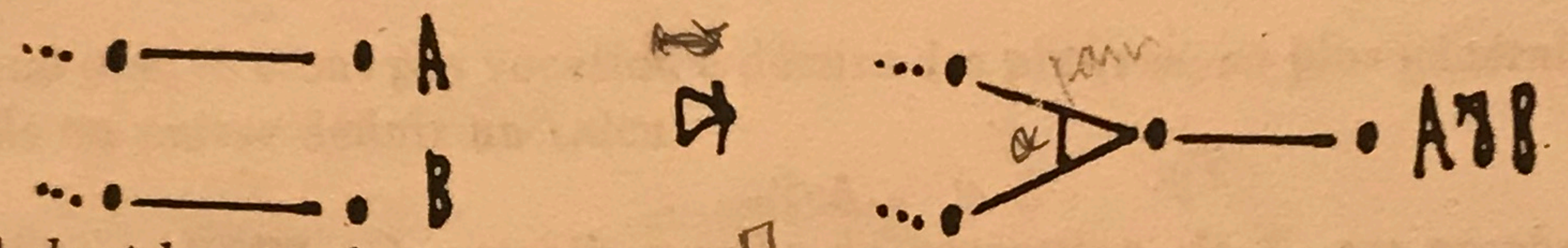


$C(S) = \emptyset$ empty

muni de l'ensemble vide de paires est une SPA.

2. Lien **par**. *Si S_1 est une SPA dont les conclusions sont $X_1, \ldots, X_n$, A et B et les paires $C(S_1)$, alors la transformation :*

$C(S_1)$

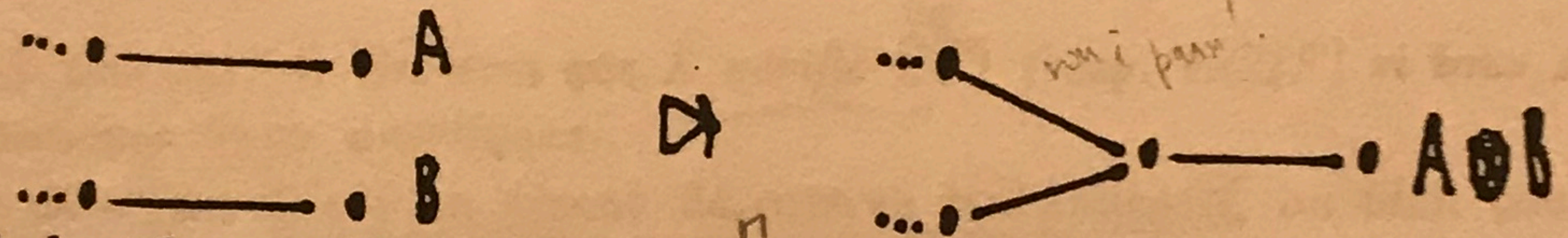


$C(S_1) \cup \{\alpha\}$

fournit une SPA dont les conclusions sont $X_1, \ldots, X_n, A \wp B$ et les paires $C(S_1)$ plus la nouvelle paire indiquée sur la figure.

3. Lien **fois**. *Si S_1 est une SPA dont les conclusions sont $X_1, \ldots, X_n$, A et B et les paires $C(S_1)$, alors la transformation :*

$C(S_1)$

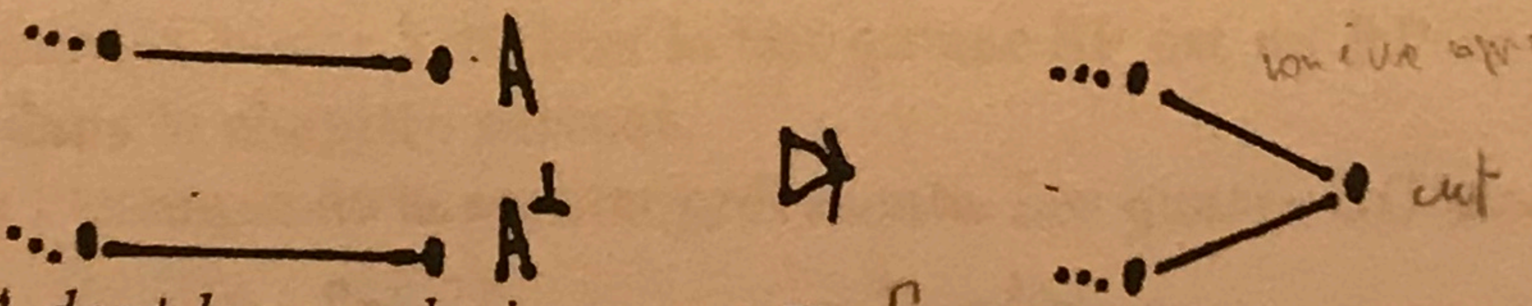


$C(S_1)$

fournit une SPA dont les conclusions sont $X_1, \ldots, X_n, A \otimes B$ et les paires $C(S_1)$.

4. Lien **cut**. *Si S_1 est une SPA dont les conclusions sont $X_1, \ldots, X_n$, A et $A^\perp$ et les paires $C(S_1)$, alors la transformation :*

$C(S_1)$



$C(S_1)$

fournit une SPA dont les conclusions sont $X_1, \ldots, X_n$ et les paires $C(S_1)$.

5. Mix. Si S_1 (resp. S_2) est une SPA dont les conclusions sont $X_1, \ldots, X_n$ (resp. $Y_1, \ldots, Y_m$), alors la juxtaposition de S_1 et S_2 est une SPA dont les conclusions sont $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots$ et Y_m et les paires $C(S_1) \cup C(S_2)$.

On notera S^- la PSPA associée à S, i.e., celle qu'on obtient en oubliant l'étiquetage de S. S^-

Remarque. On voit que les paires sont introduites lors de liens **par**, icelles sont bien coïncidentes et disjointes. De plus, seuls des sommets de degré 1 sont étiquetés. Une SPA est donc bien une PSPAE.

On utilisera dans la suite les SP sous la forme qui nous convient le mieux. La correspondance entre les deux formes est décrite par le nom des règles de formation. On pourrait montrer qu'on sait reconstruire une SPC à partir de sa forme abstraite, mais ça ne sert à rien. En

SPC ↦ SPA ↦ SPAᴱ

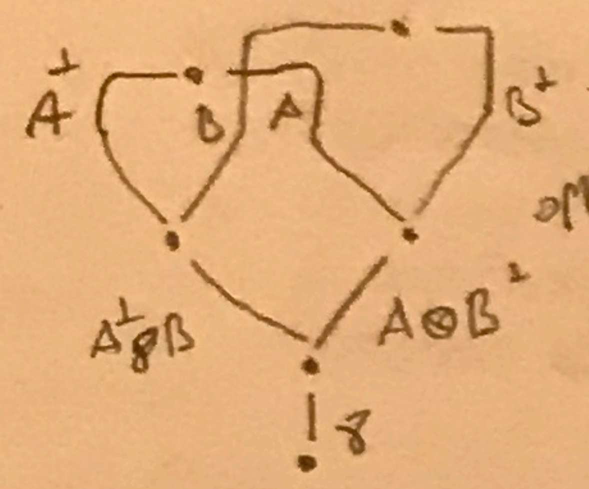
SP

C (concreta) A (astratta)

se R un SP R è un RP (Correttn DR) ⟺ R^- è ACC o DR (SPA) ⟺ ogni $S(R^-)$ è ACC

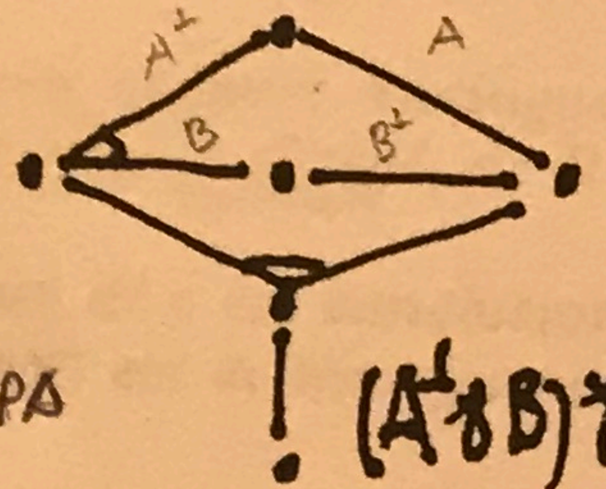
particulier, on emploiera sans gêne des expressions comme "l'arête correspondant à telle formule" ou encore "le sommet, ou la paire, correspondant à tel lien **par**".

Exemple. A gauche une SPC et à droite la SPA correspondante :



$$\dfrac{\dfrac{A^\perp \quad B}{A^\perp \wp B} \qquad \dfrac{B^\perp \quad A}{B^\perp \otimes A}}{(A^\perp \wp B) \wp (B^\perp \otimes A)}$$

SPC ⟷ SPA



$(A^\perp \wp B) \wp (A \otimes B^\perp)$

solo le conclusioni etichettate

3.2. Réseaux multiplicatifs.

Toutes les structures de preuve n'ont pas vocation à décrire des preuves, ou plus généralement des objets sur lesquels on puisse définir un calcul.

Définition 3–4. *Soit S une PSPA. On appelle graphe de correction de S, un graphe non-orienté obtenu à partir de S en enlevant pour chacune des paires de S un de ses deux éléments.* GC

Remarque. Donc, il y a 2^p tels graphes, si p est le nombre de liens **par** que compte S.

Définition 3–5. *Soit S une PSPA. On dira que S vérifie CC1 (resp. CC1F) si tous ses GC sont acycliques et connexes (resp. acycliques).* CC1/CC1F

ACC

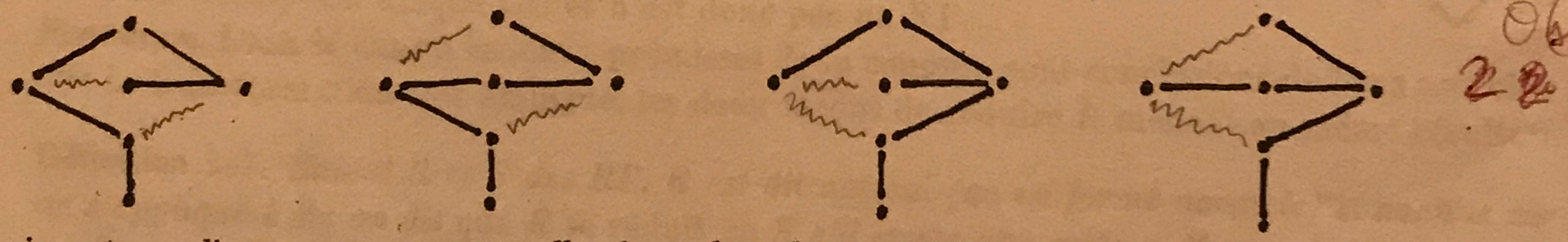
Soit R une SP. On dira que R est un réseau de preuve multiplicatif, ou bien que R est correct, ssi R^- vérifie CC1. se ogni GC è ACC RP

On notera PN_0 l'ensemble des RP. PN_0

Remarque. Cette condition invite à décider le fait qu'une SP est un RP en temps exponentiel. Nous ferons mieux dans le chapitre suivant.

Exemple. Reprenons l'exemple de la section précédente. Les quatre GC associées à la SP sont : V+E

2^2 GC



$O(2^p(GC))$

AO

qui sont acycliques et connexes, celle-ci est donc bien un RP.

Lemme 3–1. *Soit S une PSPA (SP) et γ un chemin de S. On dira que γ est réalisable s'il n'emprunte jamais deux arêtes appartenant à la même paire.* "switching path" (che non passa da due archi di un ⅋-link)

Une PSPA qui vérifie CC1 n'admet pas de cycles réalisables. Réciproquement une PSPA qui n'admet pas de cycles réalisables vérifie CC1F.

- switching path
- switching cycle

↓ non ammette switching path che siano cicli

Preuve : C'est évident. ◇

Lemma 3.1 Se una PSPA (SP) che è corretta DR allora non ammette switching cycles
Viceversa se non ammette switching cycles ⟹ è debolmente DR (aciclico)

ACC complessità

~~Esatto~~ Decidere se un graf è ACC richiede una complessità $O(|V|+|E|)$.
Questa complessità è lineare nella taglia di un graf (V,E)

3.3. Réduction des réseaux multiplicatifs.

Nous allons décrire la réduction des réseaux, i.e., comment éliminer un lien coupure.

eer

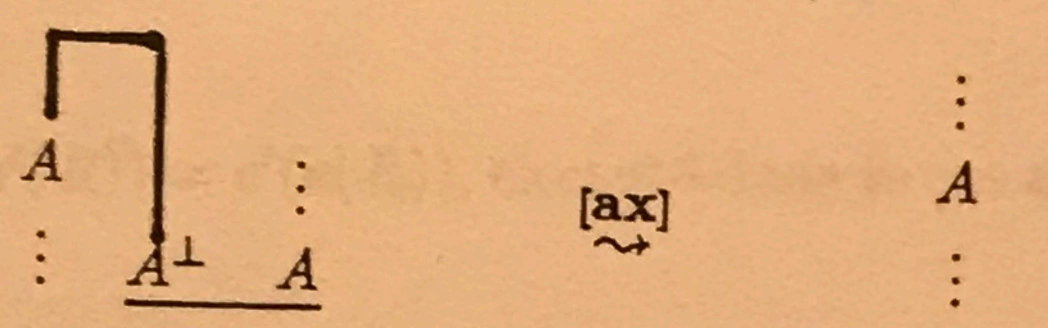
passi elementari di riduzione

Définition 3–6. *Soient R un RP et c un lien coupure distingué dans celui-ci. Il y a deux différentes étapes élémentaires de réduction,* eer *en abrégé, de R associées à c selon les liens dont les prémisses de c sont conclusions.* eer

abbreviato

1. eer [**ax**]. *Dans le cas où l'une des prémisse de c est conclusion d'un lien* **ax**, *c est appelée* coupure axiome. *L'eer associée à c, notée* [**ax**] *est la transformation suivante :*

Taglio definito sulle Reti RP

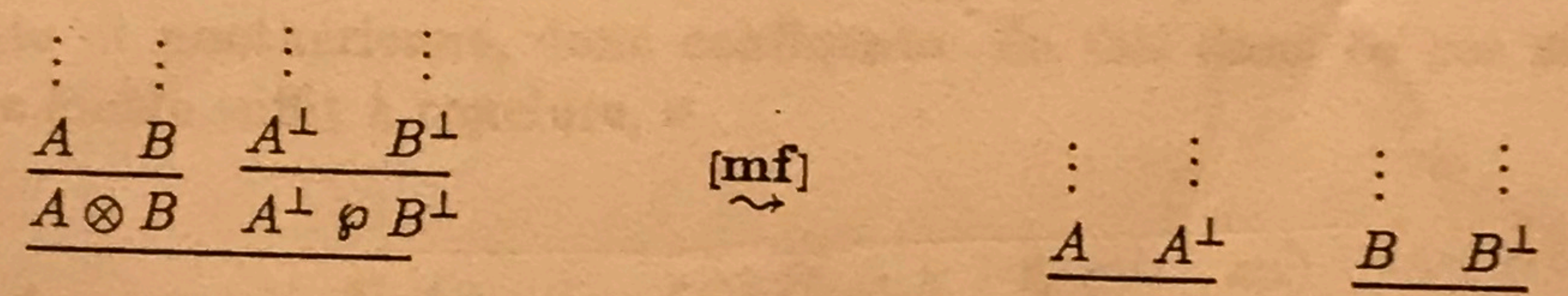


Taglio assioma

e(R)

et on note [**ax**](R) *le résultat.*

2. eer [**mf**]. *Dans le cas où les deux prémisses de c sont conclusions de liens* **par** *et* **fois**, *c est appelée* coupure multiplicative. *L'eer associée à c, notée* [**mf**] *est la transformation suivante :*

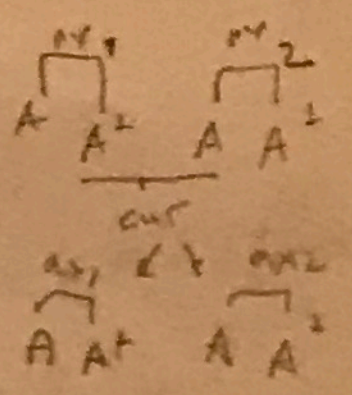


Taglio moltiplicativo.

et on note [**mf**](R) *le résultat, et* $c_1([\mathbf{mf}])$, $c_2([\mathbf{mf}])$ *les deux coupures créées par cette transformation.*

Remarque. En reprenant les notations de la clause 1 de la définition ci-dessus, remarquons qu'il n'arrive jamais que les deux occurrences de A soient la même. Sinon R est la SPA : ◯ qui est à elle-même son unique GC et n'est donc pas un RP.

Remarque. Dans le cas où les deux prémisses de la coupure sont conclusions de liens **ax**, bien que la transformation soit ambigüe, les deux façons de réduire R mènent au même résultat.



Définition 3–7. *Soient R et S des RP, R est dit* normal *(ou en forme normale) si aucune eer ne s'applique à R; on dit que R* se réduit *en S s'il existe une suite σ d'eer qui transforme R en S; une telle suite est appelée* réduction *de R, et on écrit $\sigma(R) = S$; la* norme de R, *notée* norm(R), *est la borne supérieure de la longueur des réductions de R, si celle-ci est finie on dit que R est* fortement normalisable.

sup

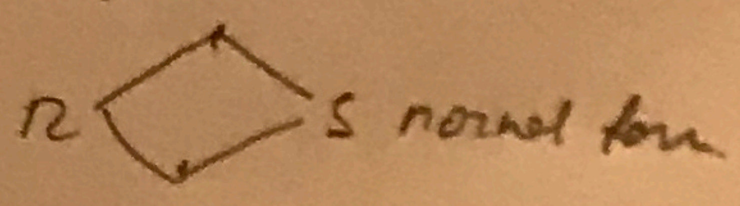
σ(R)

Proposition 3–2. PN$_0$ *est stable par réduction, i.e., soit R un RP, toute eer e appliquée à R est telle que $e(R)$ est un RP.*

PN$_0$ *a la propriété de forte normalisation, i.e., la relation de réduction est noethérienne, autrement dit tout RP est fortement normalisable.*

tutte le strategie di riduzione terminano.

- R è fortemente normalizzabile se tutte le strategie di riduzione F.N. sono finite e terminano con ~~la forma~~ una forma normale
- R è debolmente normalizzabile se ∃ una strategia di riduzione di R in forma normale
- se R è deb. normalizz. e confluente localmente ⇒ R è FN.

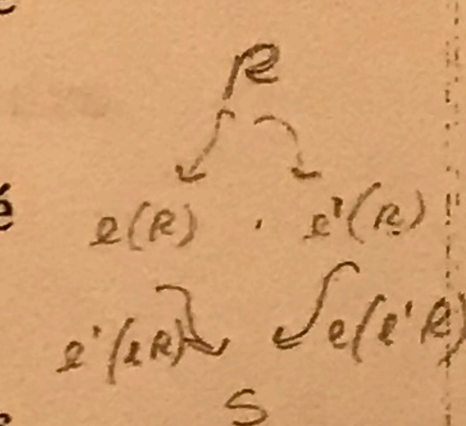


Preuve : Il n'est pas difficile de voir que $e(R)$ est bien une SP. Quant au fait qu'elle vérifie CC1, nous en remettons la preuve au chapitre 5 où l'on caractérisera les transformations qui conservent CC1 (cf. proposition 5–2).
D'autre part, $e(R)$ est de plus petite taille que R, la seconde propriété en découle. ◇
Remarque. En particulier, la situation délicate de la pénultième remarque n'est pas non plus accessible par réduction.

stabilità di CC1 sotto riduzione CAPS

Lemme 3–3. *La relation de réduction de* $\mathbf{PN_0}$ *est localement confluente, i.e., soient R un RP et e, e' deux eer distinctes simultanément applicables à R, alors il existe un RP S tel que $e(S)$ et $e'(S)$ se réduisent en S.*

confluenza locale

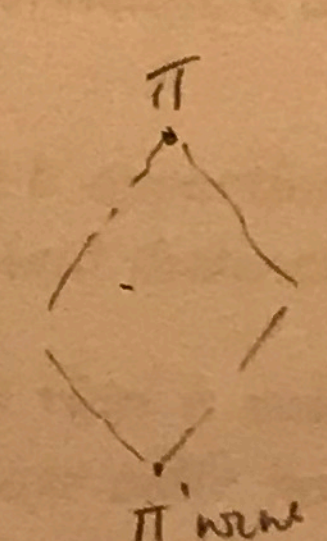


Preuve : En fait, il y a mieux, $e(e'(R)) = e'(e(R))$, excepté dans le cas ambigu déjà mentionné où $e(R) = e'(R)$. ◇

Proposition 3–4. *La relation de réduction de* $\mathbf{PN_0}$ *est confluente, i.e., soient R, S_1 et S_2 des RP tels que R se réduise en S_1 et S_2, alors il existe un RP S tel que S_1 et S_2 se réduisent en S.*

Preuve : En vertu du lemme 3–3 et de la proposition qui précède la réduction de $\mathbf{PN_0}$ est localement confluente et noethérienne, donc confluente. En fait dans ce cas simple le seul lemme de confluence locale suffit à conclure. ◇

~~Teorem~~ Normalizzazione Forte + confluenza locale $\Rightarrow$ confluenza, i.e. unicità della forma normale



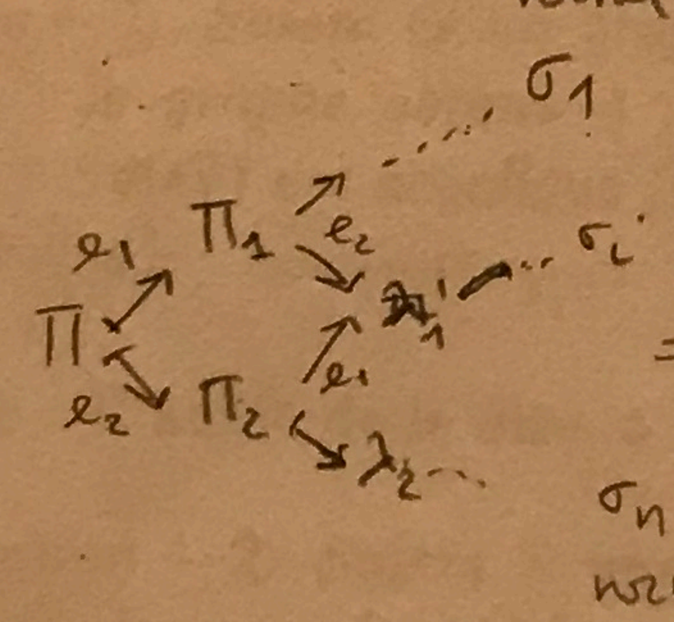
quella dei tipi
su i atomici

$\gamma(a) = 1$

$\gamma(A \otimes B) = \gamma(A) + \gamma(B) + 1$

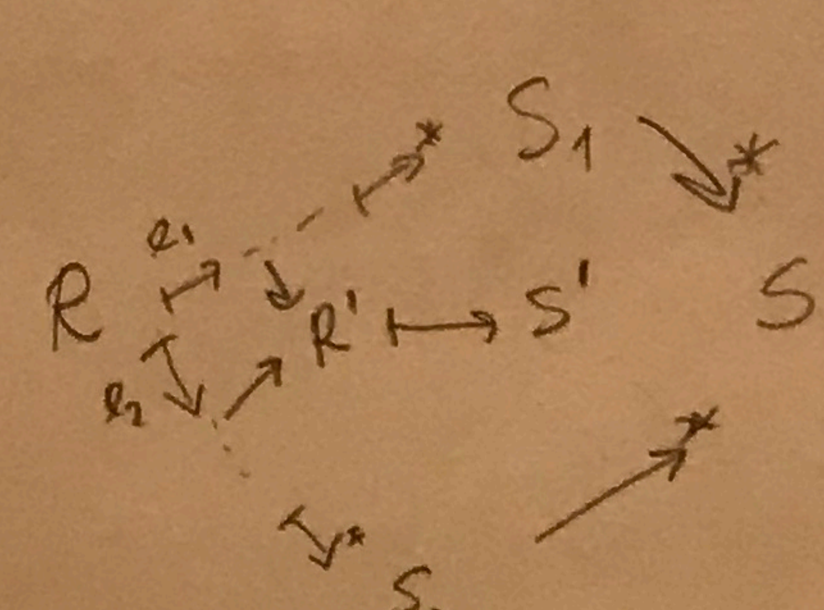
~~max~~ $(\gamma(A) + \gamma(B)) + 1$

per ind. sulle complessità di tipo γ



$\Rightarrow$ per ind. sulla ~~lunghezza della riduzione~~ complessità del peso di tipo $\sigma_i = \sigma_n$ $\Rightarrow$ $\sigma_1 = \sigma_i$

$\sigma_i \neq \sigma_j$



Chapitre 4.

D'autres caractérisations des réseaux multiplicatifs.

Comme son titre l'indique ce chapitre part à la recherche de caractérisations des RP équivalentes à la condition CC1 énoncée dans le chapitre précédent.

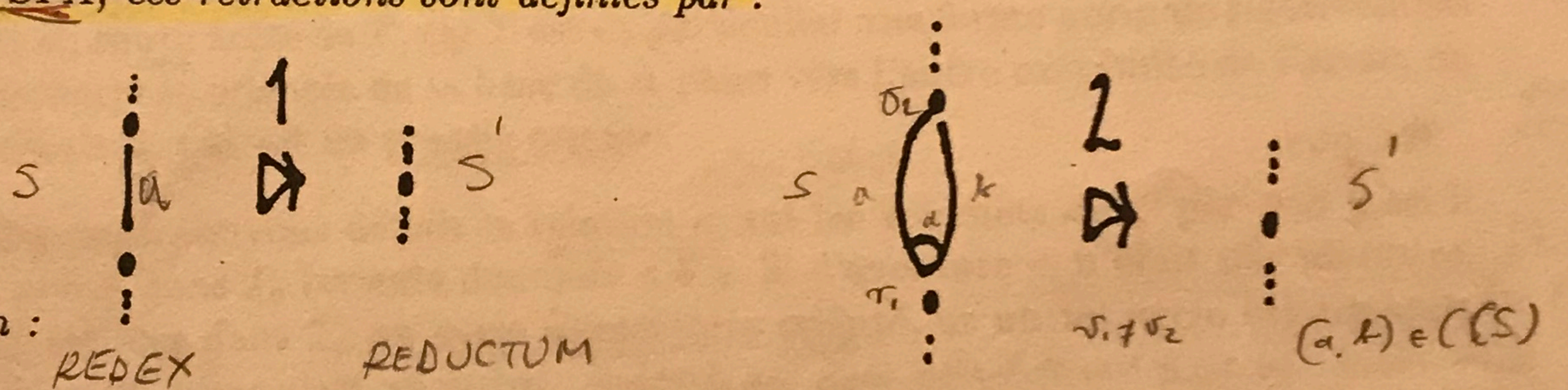
DR

4.1. Rétractions des structures de preuve.

contrazioni o ritrazioni

Définition 4–1. *On définit deux réductions sur les PSPA, qu'on appelle des rétractions. Soit donc S une PSPA, ces rétractions sont définies par :*

S i PSPA



à la condition :

r1 • *pour la 1-rétraction, que l'arête a n'appartienne à aucune paire de $C(S)$ et que ses deux extrémités soient distinctes;*

r2 • *pour la 2-rétraction, que les arêtes a et b appartiennent à une même paire de $C(S)$ et que leurs deux communes extrémités soient distinctes.*

On conviendra (quoique cette réduction n'ait rien à voir avec celle du chapitre précédent) d'importer tout le vocabulaire défini en 3–7 pour cette nouvelle réduction.

Lemme 4–1. *Soient G un graphe, a une arête de G dont les deux extrémités sont distinctes et $a(G)$ le graphe obtenu à partir de G en identifiant les deux extrémités de a et en oubliant a : $a(G)$ est acyclique (resp. acyclique et connexe) ssi G est acyclique (resp. acyclique et connexe).* conseguenza di Eulero-Poincaré

$\#CC - \#Cy = \#V - \#E$

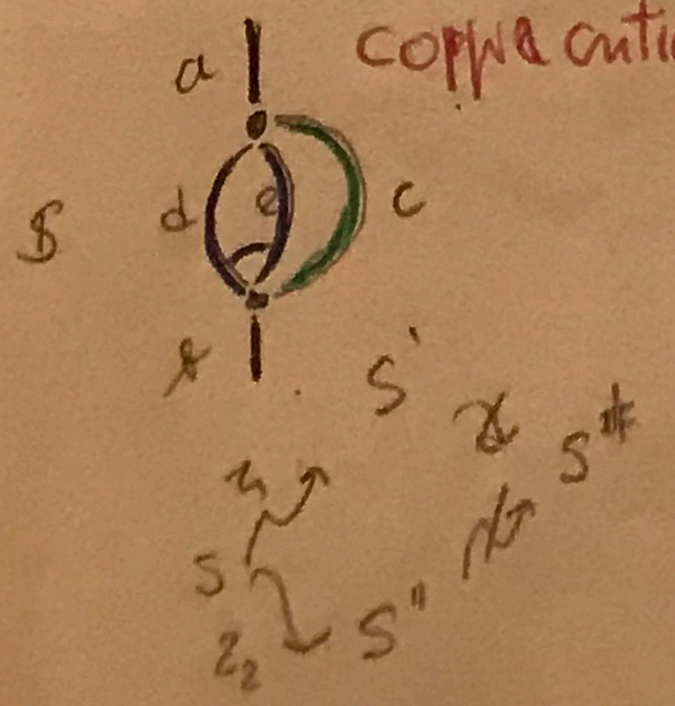
$|CC| - |Cy| = |V| - |E|$

Preuve : Il suffit de le dire. ◇

Proposition 4–2. *Soient S une PSPA et r une rétraction de S, $r(S)$ est encore une PSPA. On peut donc parler de la relation de rétraction sur les PSPA. Celle-ci est confluente et noethérienne. Enfin $r(S)$ vérifie CC1 (resp. CC1F) ssi S vérifie CC1 (resp. CC1F).*

DR DR

coppia critica : non confluente



$S \leadsto r_i(S)$, $i=1,2$ S è DR $\Leftrightarrow r_i(S)$ è DR

non ci sono coppie critiche

S è confluente ⟹ S è confluente

Preuve : Les deux premières prétentions sont visiblement correctes. Quant à la troisième, c'est une conséquence du lemme ci-dessus. ◇

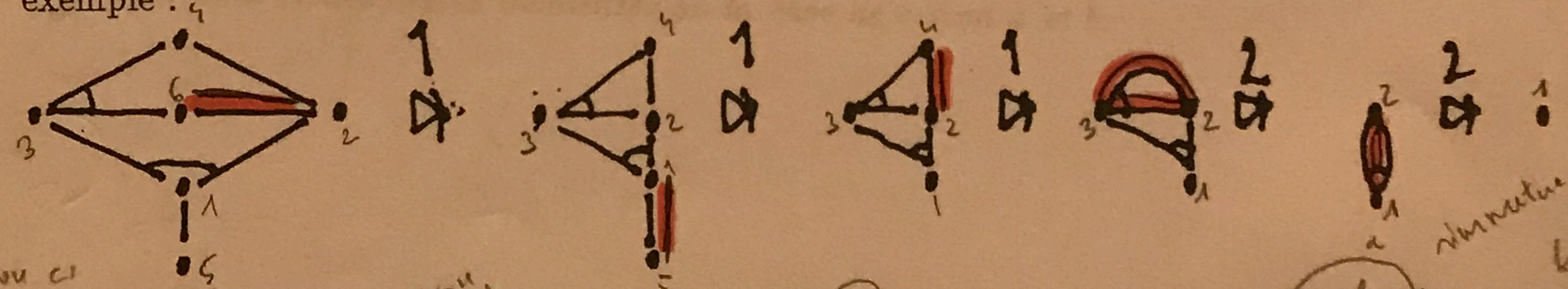
Définition 4–2. *Soit S une PSPA. On dira que S vérifie CC2 si elle se rétracte en un simple sommet, i.e., si sa forme normale relativement à la relation de rétraction est le graphe à un sommet et sans arêtes.*

Théorème 4–3. *Les conditions CC1 et CC2 sont équivalentes.*

Preuve : Si S se rétracte en un simple sommet, alors par la troisième propriété de la proposition ci-dessus (utilisée dans le sens seulement si), S vérifie CC1. En effet, un simple sommet vérifie CC1. C'est d'ailleurs le seul graphe à un sommet qui vérifie CC1.
Supposons à l'inverse que S vérifie CC1, et notons T la forme normale de S relativement à la relation de rétraction. Par la troisième propriété de la proposition ci-dessus (utilisée dans le sens si cette fois) T vérifie CC1.

1. De T nous orientons les arêtes de la manière suivante : toute arête appartenant à une paire de T (i.e., toute arête de T, car T est en particulier une forme normale relativement à la 1-rétraction) est orientée de la base de la paire vers l'autre extrémité de l'arête; on note T_o le résultat, qui est un graphe orienté.
2. Grâce à quoi nous pouvons définir la relation $<$ sur les sommets de T par $x < y$ ssi il existe un chemin dans T_o (orienté donc) de x à y. Si d'aventure $<$ n'était pas un ordre, on pourrait trouver dans T_o un cycle élémentaire orienté, or un tel cycle est toujours réalisable dans T. Donc c'est un ordre.
3. Soit x un sommet de T maximal pour $<$. Puisque T vérifie CC1, T est connexe. Donc, ou bien il y a des arêtes incidentes en x, ou bien x est le seul sommet. Dans ce dernier cas, par la remarque ci-dessus, T est forcément un simple sommet, ce qu'on voulait démontrer. Dans le premier cas, puisque T est normale, les arêtes incidentes en x appartiennent à des paires dont l'autre arête n'est pas incidente en x (sinon une 2-rétraction serait possible). Mais alors, dans tout GC de T où l'on aura choisi pour chacun de ces paires l'autre arête, x sera seul dans sa composante connexe, ce qui est absurde. $\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\cdot(n^2+n) \Rightarrow O(n^2)$ quadratico!

En fait, le lecteur pourra s'amuser à définir d'autres orientations de T telle que $<$ soit encore un ordre dès que T vérifie CC1F. Il y a 2^p manières de définir ces orientations si p est le nombre de paires de T, et si chacune sont des ordres, alors T vérifie CC1F. ◇
Remarque. Le théorème qu'on vient de prouver fournit un algorithme pour décider le fait qu'une SP est un RP en temps quadratique en la taille de la PSPA associée. La preuve indique où chercher à effectuer les 2-rétractions.
Exemple. Rétractons la SPA qu'on a déjà pris en exemple dans le chapitre précédent. Par exemple :



$\Pi \in$ DR connesso $\Leftrightarrow \Pi$ è contraibile

Contrazione e DR sono equivalenti

CC2 → CC1

CC1 → CC2

T normale → T_o (orientato)

$x<y$ se … ; $x \to \dots \to y$

T_o 1 … 2 $\Rightarrow (1<2)\wedge(2<1)$ non è un ordine

ciclo elementare $\Rightarrow 1<1$

T_o ciclo ele $\Rightarrow T$ non è connesso

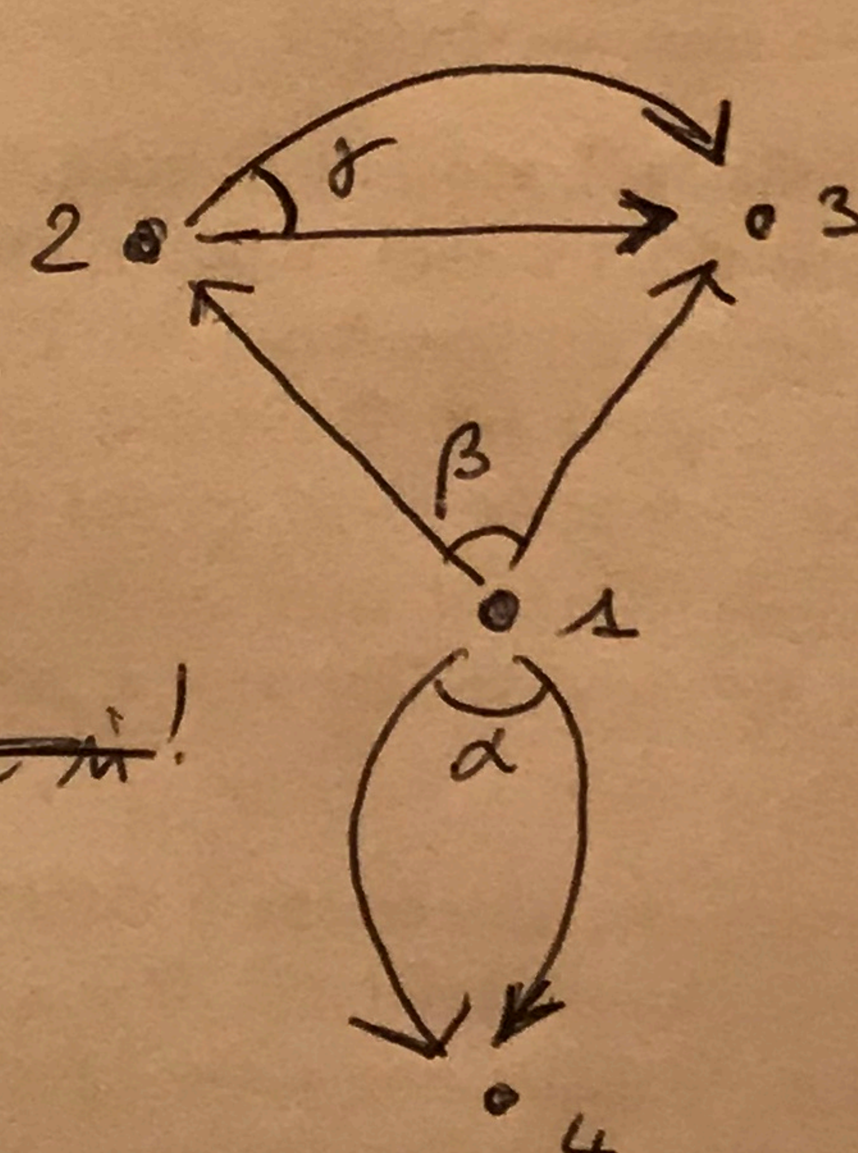
· ~~Complessità~~ del criterio contraibile (Dones) è quadratica $O(n^2)$ dove n è il numero dei nodi/vertici del grafo appresso (il grafo con coppie, decorato con α, β, γ).

Il criterio infatti prova per ogni coppia se è contraibile
– quindi nel caso peggiore può darsi che le coppie contraibili siano l'n-esima; poi la n-1-esima ... e così via

quindi
$$\begin{array}{l} n \text{ test} \\ + \; n-1 \text{ test} \\ + \\ \vdots \\ + \; 1 \text{ test} \\ \hline = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2} \end{array}$$

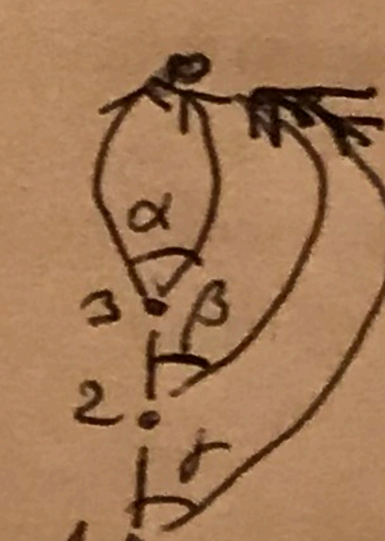
Esempi

es. 1



Abbiamo 3 coppie: α, β, γ
- provo β no, poi α sì, ~~poi α sì~~!
- provo β no, poi γ sì.
- provo β sì

es. 2



· γ no, β no, α sì
· γ no, β sì
· γ sì.

et donc c'est un RP.

Remarque. Considérons la condition, CC2F, qui consiste à demander qu'une PSPA se rétracte en une juxtaposition de simples sommets. Alors s'il est clair que CC2F entraîne CC1F, la converse est fausse. Donc jusqu'à plus ample informé la condition CC1F n'est pas décidable en temps polynomial. On va faire mieux dans la section suivante.

4.2. Sections d'une structure de preuve.

Définition 4–3. *Soit S une PSPA et c une paire de S de base x et d'extrémités y et z. Appelons $c(S)$ la PSPA obtenue en enlevant à S les deux arêtes appartenant à c, et notons S_c^- (resp. S_c^+) la composante connexe (resp. le complémentaire de la composante connexe) de x dans $c(S)$ qui est encore une PSPA.*
On dira que c est une section *de S si S_c^- ne contient ni y ni z, autrement dit, si tout chemin de S qui joint x à y ou x à z passe par une des deux arêtes de c.*

Une section est une paire qui "coupe S en deux parties".

Lemme 4–4. *Soit S une PSPA et c une section de S : S vérifie CC1 (resp. CC1F) ssi S_c^- et S_c^+ vérifient CC1 (resp. CC1F).*

Preuve : Il sufffit de remarquer que tout GC de S se décompose en deux GC de S_c^- et S_c^+ connectés par un isthme. ◇

Proposition 4–5. *Soit S une PSPA qui vérifie CC1F et telle que $C(S)$ n'est pas vide, alors une de ses paires est une section.*

Preuve : On va montrer qu'il n'est pas de PSPA S

- (H1) qui vérifie CC1F,
- (H2) dont l'ensembles des paires $C(S)$ est non-vide,
- (H3) et dont aucune paire n'est une section.

Sous ces hypothèses, nous allons construire une suite croissante S_n de sous-PSPA de S, et prouver que cette construction ne s'arrête pas. Donc S est infinie, donc c'est absurde. Voilà l'idée.

Nous ne manipulerons dans cette preuve que des cycles élémentaires, c'est à dire, tels qu'aucun de leurs sous-chemins stricts ne soit cyclique.

Définition 4–4. *Soient S et R deux PSPA. On dira que R est une sous-PSPA de S si R est un sous-graphe de S et si toutes deux arêtes de R sont appariées dans R ssi elles le sont dans S.*
On dira qu'une paire $c = \{a, b\}$ est une paire libre *dans S si sa base est de degré 2, autrement dit si les deux seules arêtes incidentes en la base de c sont a et b.*

On dira qu'un chemin passe par une paire *s'il emprunte ses deux arêtes, on dira aussi dans ce cas que* la paire appartient au chemin, *et on appelera* pseudo-réalisable, *pr. en abrégé, un chemin de S qui ne passe que par des paires libres.*
On dira qu'un chemin γ est attractif *si pour tout sommet u qui n'appartient pas à γ, il existe deux chemins pseudo-réalisables de u à γ distincts en u (i.e., qui n'empruntent pas la même première arête en u) et qui ne coupent γ qu'en un sommet.*
Si γ est un chemin de S et δ un chemin qui prolonge γ, on notera $\gamma :: \delta$ leur composition.

Remarque. Si S satisfait à CC1F et que R est une sous-PSPA de S, alors R satisfait aussi à CC1F.

L'hypothèse d'induction est la suivante :

- (Hi1) S_n est une sous-PSPA de S.
- (Hi2) S_n a un cycle D_n pr. et attractif.

Cas de base. Certainement, il y a un cycle dans S, sinon toute paire est une section (ce qui contredit la conjonction de H2 et H3). Prenons pour S_0 l'un quelconque de ces cycles muni de toutes les paires par lesquelles il passe. Cette PSPA satisfait bien Hi1–2.
Cas général. Supposons qu'on a construit S_n. La construction de S_{n+1} se décompose en deux étapes.

1. *Ajout d'un chemin à S_n.* Puisque D_n est pr. il existe (par Hi1 et la remarque ci-dessus) dans D_n une paire libre de base x. Cette paire n'est pas une section de S (par H3). Il existe donc un sommet z de S_n distinct de x et un chemin α de S qui joint x à z et ne coupe S_n qu'en $\{x, z\}$. Prenons pour S'_n, S_n augmenté du chemin α.

2. *Appariements dans S'_n.* Apparions dans S'_n toutes deux arêtes appariées dans S et non-appariées dans S_n. Deux telles arêtes soit appartiennent à α, auquel cas leur nouvelle paire est libre, soit sont coïncidentes en z, auquel cas l'une des deux arêtes appartient à α. Remarquons que les nouvelles paires ont au moins une de leurs arêtes dans α, et que la seule éventuelle nouvelle paire non-libre a pour base z, tandis que les seules vieilles paires éventuellement devenues non-libres ont pour base x ou z. Prenons pour S_{n+1} le fruit de cet ajout éventuel.

Nous procédons maintenant à la vérification du fait que S_{n+1} satisfait à l'hypothèse d'induction. Nous avons pris soin de Hi1 quand il le fallait. Reste à s'assurer de Hi2.

- *Construction de D_{n+1}.* Il existe deux chemins pr. δ_1 et δ_2 de z à D_n, distincts en z et qui ne coupent D_n qu'en un sommet (par Hi3 appliquée à S_n), sauf si z appartient à D_n, lequel cas nous remettons à plus tard. Notons ces sommets respectivement z_1

et z_2. Il ne se peut pas que z_1 (resp. z_2) soit x, car par construction, dans S_n, x est de degré 2 et z_1 (resp. z_2) de degré 3. L'un des deux chemins suivants est pr. :

$$\alpha :: \delta_1, \ \alpha :: \delta_2$$

En effet δ_1 et δ_2 sont pr. dans S_n, donc par la remarque ci-dessus sont pr. dans S_{n+1}; par construction α l'est aussi. L'intersection de α et δ_1 (resp. δ_2) est réduite à z. Grâce au fait que δ_1 et δ_2 sont distincts en z, $\alpha :: \delta_1$ et $\alpha :: \delta_2$ ne peuvent simultanément passer par l'éventuelle paire ajoutée en z au paragraphe 2. Nous dirons que l'une des deux jonctions est correcte. Supposons que $\alpha :: \delta_1$ ne l'emprunte pas, il est pr., nous venons de le montrer.

Appelons β_1 et β_2 les deux sous-chemins stricts de D_n qui joignent z_1 à x. L'un des deux cycles suivants est pr. :

$$\alpha :: \delta_1 :: \beta_1, \alpha :: \delta_1 :: \beta_2$$

Les chemins $a :: \delta_1$ et β_1 (resp. β_2) se coupent exactement en $\{z_1, x\}$. De plus β_1 et β_2 sont pr. dans S_{n+1} car il le sont dans S_n et qu'aucune des paires leur appartenant n'a pu cesser d'être libre au paragraphe 2. Par la même remarque idiote que plus haut, on montre que la jonction en z_1 est correcte (car β_1 et β_2 sont distincts en z_1). D'autre part, par construction, l'unique paire de base x appartient à D_n, donc la jonction en x est correcte dans les deux cas. Supposons $a :: \delta_1 :: \beta_1$ pr., voilà D_{n+1}.

Si $z \in D_n$, le même raisonnement qu'au-dessus, en remplaçant z_1 par z, convient.

- *D_{n+1} est attractif.* Il faut vérifier maintenant que D_{n+1} est attractif, i.e., pour tout u dans S_{n+1} qui n'est pas dans D_{n+1} montrer deux chemins pr. distincts en u qui le joignent à D_{n+1} et ne le coupent chacun qu'en un sommet.

  Puisque u n'est pas dans D_{n+1}, il figure déjà dans S_n. S'il est dans D_n, puisque x et z_1 sont dans l'intersection des deux cycles, les sous-chemins stricts de D_n qui joignent u à x et z_1 conviennent. S'il n'est pas dans D_n, il existe deux chemins pr. dans S_n, ϵ_1 et ϵ_2, distincts en u, et qui le joignent à D_n (par Hi3 appliquée à S_n). Prenons-en un, ϵ_1. S'il ne coupe pas D_{n+1}, il est facile de voir qu'on peut le prolonger de manière pr. jusqu'à x ou z_1, ce qu'on voulait. Si, en revanche, il coupe D_{n+1}, alors sa portion avant le premier impact sur D_{n+1} convient par définition. Il faut vérifier enfin que les deux chemins obtenus sont toujours distincts en u. Ceci vient du fait que la construction garde une portion non-nulle des ϵ, excepté si u appartient à D_{n+1}, mais justement ce n'est pas le cas.

La preuve décrit une méthode pour trouver une paire qui contredit H3, i.e., une section. ◇ cc3

Définition 4–5. *Soit S une PSPA. On dira que S est* héréditairement sécessive (resp. faiblement héréditairement sécessive), *ou que S vérifie la condition CC3 (resp. CC3F), si ou bien S*

est 1-rétractable en un simple sommet (resp. en une juxtaposition de simples sommets), ou bien S admet une section c et S_c^- et S_c^+ sont héréditairement sécessives (resp. faiblement héréditairement sécessives).

Remarque. La définition ci-dessus est récursive. Cependant, S_c^- et S_c^+ ont des ensembles de paires strictement inclus dans $\mathcal{C}(S)$. Le lecteur la transformera facilement en une définition inductive.

Théorème 4–6. *Les conditions CC1 (resp. CC1F) et CC3 (resp. CC3F) sont équivalentes.*

Preuve : Supposons que S soit héréditairement sécessive (resp. faiblement héréditairement sécessive) alors par le lemme 4–4 (utilisé dans le sens si) le théorème 4–3 et la proposition 4–2, elle vérifie CC1 (resp. CC1F).
Inversement, si S vérifie CC1 (resp. CC1F), alors d'après la proposition 4–5, (i) ou bien $\mathcal{C}(S)$ est vide, et dans ce cas S se rétracte en un simple sommet (resp. en une juxtaposition de simples sommets) par une suite de 1-rétractions, en effet $\mathcal{C}(S)$ étant vide il n'y a pas possibilité de faire de 2-rétractions, donc, par définition, elle vérifie CC3 (resp. CC3F), (ii) ou bien il y a dans S une section c et par le lemme 4–4 (utilisé dans le sens seulement si cette fois) S_c^- et S_c^+ vérifient aussi CC1 (resp. CC1F), ce qu'on voulait montrer. ⋄
Remarque. Cette nouvelle condition donne tout à la fois un autre procédé polynomial de décision de CC1 et un procédé polynomial de décision de CC1F. Il faut goûter cette qualité particulière.

4.3. Structures de preuve 1-séquentielles.

Définition 4–6. *Nous définissons inductivement "S* est une SPC 1-séquentielle dont les conclu*sions sont $X_1, \ldots, X_n$", où $X_1, \ldots, X_n$ sont dans $\mathcal{F}_m$. On dira aussi que S vérifie CC4.*
1. Lien ax. *Pour toute formule multiplicative A*

$$\overline{A \quad A^\perp}$$

est une SPC 1-séquentielle dont les conclusions sont $A, A^\perp$.
2. Lien par. *Si S_1 est une SPC 1-séquentielle dont les conclusions sont $X_1, \ldots, X_n$, A et B, alors S est une SPC 1-séquentielle dont les conclusions sont $X_1, \ldots, X_n$ et $A \wp B$, où S est :*

$$\begin{array}{c} S_1 \\ \vdots \\ \underline{A \quad B} \\ A \wp B \end{array}$$

3. Lien fois. *Si S_1 (resp. S_2) est une SPC 1-séquentielle dont les conclusions sont $X_1, \ldots, X_n$ et A (resp. $Y_1, \ldots, Y_m$ et B), alors S est une SPC 1-séquentielle dont les conclusions* *sont* $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ *et* $A \otimes B$*, où* S *est :*

$$\begin{array}{cc} S_1 & S_2 \\ \vdots & \vdots \\ A & B \\ \hline \multicolumn{2}{c}{A \otimes B} \end{array}$$

4. **Lien cut.** *Si* S_1 *(resp.* S_2*) est une SPC 1-séquentielle dont les conclusions sont* $X_1, \ldots, X_n$ *et* A *(resp.* $Y_1, \ldots, Y_m$ *et* $A^\perp$*), alors* S *est une SPC 1-séquentielle dont les conclusions sont* $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$*, où* S *est :*

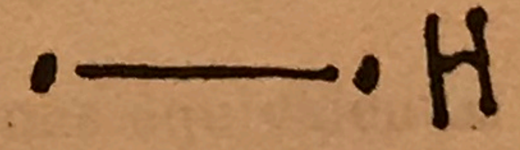
$$\begin{array}{cc} S_1 & S_2 \\ \vdots & \vdots \\ A & A^\perp \\ \hline \end{array}$$

Il est clair qu'une SPC 1-séquentielle est bien une SPC et que la réciproque n'est pas vraie. S'agit-il encore d'une nouvelle caractérisation des RP ? Oui. Cette manière de décrire les RP est la plus naturelle si on les définit à partir du calcul des séquents.

Théorème 4–7. *Les conditions CC3 et CC4 sont équivalentes, i.e., soit* S *une SP,* S^- *vérifie CC3 ssi* S *vérifie CC4.*

Preuve : Si S est 1-séquentielle alors on prouve facilement par induction sur la définition d'une structure 1-séquentielle que S^- vérifie CC1, CC2 ou CC3 (la dernière utilisation de la clause 2 définit une section).
Inversement, il faut montrer que si S^- vérifie CC3 alors S est 1-séquentielle. Introduisons pour la preuve la notion de SP avec hypothèses, SPH en abrégé.

Définition 4–7. *Soit* S *une PSPAE, on dit qu'elle est une "SPA avec hypothèses", SPAH en abrégé, si elle a été produite au moyen des règles 1–5 de la définition 3–3, et de la règle supplémentaire :*
6. Lien hypothèse. Pour toute formule multiplicative H*, le graphe*



muni de l'ensemble vide de paires est une SPA.

Définition 4–8. *Nous définissons dans le même ordre d'idée, "*S *est une* SPC 1-séquentielle avec hypothèses, SPCH 1-séquentielle en abrégé, dont les conclusions sont $X_1, \ldots, X_n$", *en reprenant les clauses de la définition 4–6 ci-dessus, auxquelles on ajoute :*
5. Lien hypothèse. Pour toute formule multiplicative H

$$\overline{H}$$

est une SPCH 1-séquentielle dont la conclusion est H*.*

Les hypothèses sont simplement des liens axiomes unaires. Nous ne nous donnons pas la peine d'expliciter toutes les modifications, qu'en bonne formalisation, les notions de ce chapitre réclament pour s'adapter aux SPH.
Soit S une SPH, telle que S^- vérifie CC3. Montrons par induction sur le nombre de paires de S^- que S est 1-séquentielle.

1. Si S^- n'a pas de paires, ceci revient à dire que S n'a pas de lien **par**. Notons que S^- est son unique GC, et est donc acyclique et connexe par le théorème 4–6, puis raisonnons par induction sur le nombre de liens **fois** et **cut**.
   (a) S'il n'y en a aucun, par définition S a été construite au moyen des clauses 1, 5 et 6 de la définition 4–7. Mais comme S^- est connexe, on n'a pu utiliser la clause 5, donc S est un axiome ou une hypothèse, lesquels sont bien 1-séquentiels par définition.
   (b) S'il y en a un, la dernière clause utilisée, toujours par la connexité de S, ne peut être 5. Si c'est la clause 3, alors en reprenant les notations de la définition, les composantes connexes dans S_1 des sommets étiquetés A et B, qu'on notera S_A et S_B, sont deux SPAH disjointes et acycliques, sinon S est cyclique, et connexes, sinon S n'est pas connexe. Conséquemment, elles sont 1-séquentielles. Et donc S aussi en effectuant un lien **fois** (clause 3, déf. 4–6). Si la dernière clause est la clause 4, même raisonnement.
2. Si S^- a des paires, en vertu de la proposition 4–5, l'une au moins, disons c, est une section, et les SPAH (voilà pourquoi on introduit cette notion) S_c^+ et S_c^- satisfont encore, par définition de CC3, CC3. Elles sont donc 1-séquentielles par hypothèse d'induction. Appelons $A \wp B$ la conclusion correspondant au couple c dans S. Premièrement on construit S_c^+, qui compte parmi ses conclusions A et B. Deuxièmement on effectue un lien **par** (clause 2, déf. 4–6), ce qui nous fournit une SPH de conclusion $A \wp B$ que, troisièmement, on substitue au lien hypothèse $A \wp B$ dans la construction de S_c^- pour obtenir S de manière 1-séquentielle.

On connait deux autres conditions équivalentes aux conditions CC1–4, l'une à laquelle on a fait allusion qui se formule en termes d'ordre sur une PSPA et l'autre qui est la condition originale, CC0, de Girard qui se formule en termes de chemins particuliers dans une SPC, les voyages. Le lecteur qui n'a pas son compte pourra trouver (i) dans [DaRe87] la preuve de l'équivalence entre CC0 et CC1 et (ii) dans [Gir87a] la preuve de l'équivalence entre CC0 et CC4. ◇