

Lezione #
Introduzione alla Logica Lineare

Roberto Maieli

Università degli Studi "Roma Tre"
maieli@uniroma3.it
<http://logica.uniroma3.it/~maieli/teaching>

Corso di Logica (II livello, magistrale):
Introduzione alla Proof-Theory ed ai suoi più recenti sviluppi

Logica intuizionista, classica e lineare

- ▶ la Logica Lineare (Girard, 1987), un raffinamento della logica classica ed intuizionista:
 - ▶ **Logica Classica ed Intuizionista** pone l'accento sulle nozioni di **verità** e **validità** (cruciali in Filosofia e Matematica)
 - ▶ **Logica Lineare** pone l'accento piuttosto sulle nozioni di **azione** e **risorsa** (cruciali in Informatica, Fisica, Biologia)
- ▶ La principale novità introdotta dalla LL è la nozione di :
rete dimostrativa (o **proof-net**)
- ▶ I proof-nets sono la chiave di volta per studiare l'intera LL.

la novità della LL: i *proof-nets*

Il concetto di rete dimostrativa ha *triplice natura*:

- ▶ **sintattica**: perché parla di dimostrazioni come oggetti geometrici finiti (*grafi*) ... l'informatica parla di grafi (*programmi*), la biologia parla di grafi (*regolatori*);
- ▶ **semantica**: perché consente di catturare la nozione di *equivalenza tra dimostrazioni*: un proof-net (oggetto finito) intuitivamente rappresenta una classe (potenzialmente infinita) di dimostrazioni del calcolo dei sequenti equivalenti a meno di operazioni burocratiche (permutabilità di regole logiche, ordine delle regole,...)
- ▶ **computazionale**: perché consente di esprimere l'eliminazione del taglio (vero motore computazionale della logica) in maniera efficace: i tagli vengono eliminati in maniera locale, parallela e confluyente.

Il frammento moltiplicativo di LL: le regole

- **Formule:** A, B, \dots sono definite induttivamente a partire dai *letterali* (atomi o atomi negati) per mezzo dei connettivi lineari:

\otimes (*tensore o congiunzione*), \wp (*par o disgiunzione*).

- **Negazione:** $(.)^\perp$ si estende alle formule via le Leggi di de Morgan:

$$(A \otimes B)^\perp = (B^\perp \wp A^\perp) \quad (A \wp B)^\perp = (B^\perp \otimes A^\perp)$$

- **Sequenti (*ad una parte*):** Γ, Δ sono insiemi (una disgiunzione) di occorrenze di formule $A_1, \dots, A_{n \geq 1}$, derivati usando le regole:

$$\text{identità : } \frac{}{\vdash A, A^\perp} \text{ ax} \quad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, A^\perp}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{ cut}$$

$$\text{moltiplicative : } \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B} \otimes \quad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \wp B} \wp$$

Osservazione: $\Gamma \vdash \Delta \Leftrightarrow \vdash (\otimes \Gamma)^\perp, \Delta$, via negazione

Il frammento moltiplicativo di LL: le dimostrazioni

Una derivazione (prova o dimostrazione) del sequente $\vdash \Gamma$ è un albero:

- ▶ le foglie sono etichettate dagli assiomi logici,
- ▶ la conclusione è etichettata dal sequente $\vdash \Gamma$, ed
- ▶ ogni nodo intermedio è etichettato da un sequente derivato mediante una delle regole logiche o cut.

ESEMPIO 1 (omettiamo "⊢"):

$$\frac{\frac{\frac{A, A^\perp \quad B, B^\perp}{\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}, A^\perp, B^\perp} \otimes}{A \otimes B, \mathbf{A}^\perp \wp \mathbf{B}^\perp} \wp \quad \frac{\frac{\frac{B, B^\perp \quad C, C^\perp}{\mathbf{B}^\perp \otimes \mathbf{C}^\perp, B, C} \otimes}{\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}, B^\perp \otimes C^\perp, A^\perp, C} \otimes}{A \otimes B, B^\perp \otimes C^\perp, \mathbf{A}^\perp \wp \mathbf{C}} \wp}{A \otimes B, B^\perp \otimes C^\perp, A^\perp \wp C} cut$$

ESERCIZIO: la \wp -regola è invertibile: $\vdash \Gamma, A, B \Leftrightarrow \vdash \Gamma, A \wp B$

(\Rightarrow) ovvio. (\Leftarrow) $\frac{\Gamma, A \wp B \quad A^\perp \otimes B^\perp, A, B}{\Gamma, A, B} cut$

problemi del calcolo dei sequenti: eliminazione del taglio

TEOREMA : ogni dimostrazione di $\vdash \Gamma$ può essere trasformata in una dimostrazione "equivalente" (con la stessa conclusione Γ) senza tagli.

IDEA DELLA PROVA (assumiamo una dimostrazione con un solo cut) : per induzione (lessicografica) sulla coppia $\langle \delta, \lambda \rangle$ dove:

- ▶ δ é la **complessità** (il numero di connettivi \otimes/\wp) della cut-formula;
- ▶ λ é la **profondità** di un taglio (la profondità di una inferenza é data dal *max* delle profondità delle eventuali premesse + 1; gli assiomi sono a profondità 1).

ESEMPIO 2: qui sotto l'unico cut ha complessità 1 e profondità 5.

$$\frac{\frac{\frac{A, A^\perp \quad B, B^\perp}{\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}, A^\perp, B^\perp} \otimes}{A \otimes B, \mathbf{A}^\perp \wp \mathbf{B}^\perp} \wp \quad \frac{\frac{\frac{B, B^\perp \quad C, C^\perp}{\mathbf{B}^\perp \otimes \mathbf{C}^\perp, B, C} \otimes}{\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}, B^\perp \otimes C^\perp, A^\perp, C} \otimes}{A \otimes B, B^\perp \otimes C^\perp, \mathbf{A}^\perp \wp \mathbf{C}} \wp}{A \otimes B, B^\perp \otimes C^\perp, A^\perp \wp C} \textit{cut}$$

problemi del calcolo dei sequenti: eliminazione del taglio


TEOREMA : ogni dimostrazione di $\vdash \Gamma$ può essere trasformata in una dimostrazione "equivalente" (con la stessa conclusione Γ) senza tagli.

IDEA DELLA PROVA (assumiamo una dimostrazione con un solo cut) : per induzione (lessicografica) sulla coppia $\langle \delta, \lambda \rangle$ dove:

- ▶ δ é la **complessità** (il numero di connettivi \otimes/\wp) della cut-formula;
- ▶ λ é la **profondità** di un taglio (la profondità di una inferenza é data dal *max* delle profondità delle eventuali premesse + 1; gli assiomi sono a profondità 1).

ESEMPIO 2: via invertibilitá della regola \wp trasformiamo la prova in una equivalente con un cut di uguale complessitá ma minore profonditá (4).

$$\begin{array}{c}
 \frac{A, A^\perp \quad B, B^\perp}{A \otimes B, A^\perp, B^\perp} \otimes \quad \frac{B, B^\perp \quad C, C^\perp}{B^\perp \otimes C^\perp, B, C} \otimes \quad A, A^\perp \\
 \frac{A \otimes B, A^\perp \wp B^\perp}{A \otimes B, A^\perp \wp B^\perp} \wp \quad \frac{B^\perp \otimes C^\perp, B, C \quad A, A^\perp}{A \otimes B, B^\perp \otimes C^\perp, A^\perp, C} \otimes \\
 \hline
 \frac{A \otimes B, B^\perp \otimes C^\perp, A^\perp, C}{A \otimes B, B^\perp \otimes C^\perp, A^\perp \wp C} \wp \quad \text{cut}
 \end{array}$$

Possiamo applicare l'ipotesi di induzione (**QUANTA BUROCRAZIA!**) 

problemi del calcolo dei sequenti: equivalenza tra dimostrazioni (1/2)

Il teorema di eliminazione del taglio pone una questione logica e filosofica importante: **quando due dimostrazioni sono equivalenti?**

- ▶ (*accezione debole*): due dimostrazioni sono equivalenti se dimostrano la stessa **cosa** (denotano la stessa cosa).
- ▶ (*accezione forte*): due dimostrazioni sono equivalenti se dimostrano la stessa **cosa** nello stesso **modo** (hanno lo stesso “senso”).

problemi del calcolo dei sequenti: equivalenza (2/2)

ESEMPIO 3: tre dimostrazioni equivalenti, ma in senso diverso!

$$\frac{\frac{A, A^\perp \quad B, B^\perp}{A \otimes B, A^\perp, B^\perp} \otimes \quad \frac{\frac{B, B^\perp \quad C, C^\perp}{B^\perp \otimes C^\perp, B, C} \otimes \quad A, A^\perp}{A \otimes B, B^\perp \otimes C^\perp, A^\perp, C} \otimes}{A \otimes B, A^\perp \wp B^\perp \quad A \otimes B, B^\perp \otimes C^\perp, A^\perp \wp C} \wp \quad \text{cut}$$

$$\frac{\frac{A, A^\perp \quad B, B^\perp}{A \otimes B, A^\perp, B^\perp} \otimes \quad \frac{B, B^\perp \quad C, C^\perp}{B^\perp \otimes C^\perp, B, C} \otimes \quad A, A^\perp}{A \otimes B, A^\perp \wp B^\perp \quad A \otimes B, B^\perp \otimes C^\perp, A^\perp, C} \otimes}{A \otimes B, B^\perp \otimes C^\perp, A^\perp, C} \wp \quad \text{cut}$$

le prime due differiscono per la permutazione di \wp / cut

$$\frac{\frac{A, A^\perp \quad B, B^\perp}{A \otimes B, A^\perp, B^\perp} \otimes \quad C, C^\perp}{A \otimes B, B^\perp \otimes C^\perp, A^\perp, C} \otimes}{A \otimes B, B^\perp \otimes C^\perp, A^\perp \wp C} \wp$$

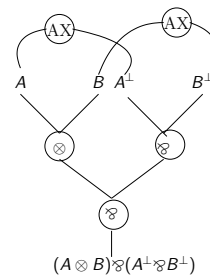
la terza é ciò che si ottiene dalle prime due, dopo aver eliminato i tagli

Che fare?

- ▶ Per rispondere a queste questioni introduciamo una nuova sintassi: le reti dimostrative (proof-nets).
- ▶ Sinteticamente: una proof net è una classe di equivalenza modulo invertibilità delle regole di dimostrazioni
- ▶ In maniera meno roboante: una proof net rappresenta (sintatticamente) una classe di dimostrazioni che differiscono solo per l'ordine in cui le regole logiche sono applicate.
- ▶ Ha una duplice natura (ne vedremo una terza):
 - semantica, in quanto sta per una classe di oggetti equivalenti; e
 - sintattica, perché parla di dimostrazioni come oggetti finiti, grafi.

strutture dimostrative: intuitivamente

è possibile vedere una dimostrazione (senza tagli) di una formula F come un grafo ottenuto aggiungendo all'albero sintattico di F degli archi (assiomi) tra due letterali duali (X ed X^\perp).



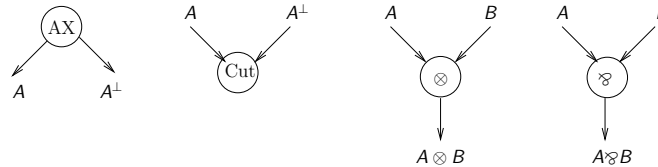
Informalmente: una rete dimostrativa è un grafo, detto **struttura di prova**, tale che:

- 1) – i nodi sono etichettati da \otimes , \wp , *Axiom* o *Cut*,
- 2) – gli archi sono etichettati da formule;
- 3) – soddisfa una proprietà geometrica (*criterio di correttezza*).

strutture dimostrative: formalmente

– un **legame** (o link) é uno dei seguenti grafi:

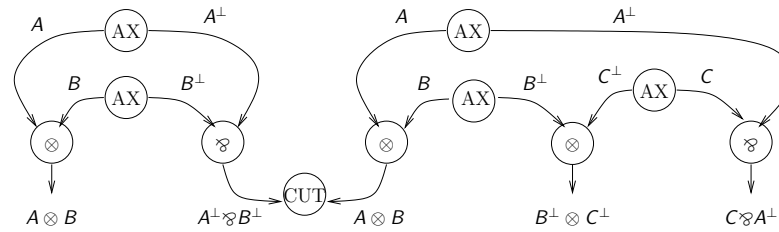
- ▶ i nodi sono etichettati dai Connettivi (\otimes, \wp), Axioma o Cut;
- ▶ gli archi orientati sono etichettati da formule:
 - gli archi incidenti un nodo sono dette *premesse*,
 - quelli emergenti sono chiamati *conclusioni* del legame



– una **struttura di prova** π é un grafo costruito a partire dai legami e tale che: ogni arco é la conclusione di esattamente un nodo e la premessa di al massimo un nodo.

– conclusioni che non sono premesse di altri legami sono dette *conclusioni della struttura di prova*.

Esempio 4: una struttura dimostrativa



Esiste un rapporto passa tra questo grafo e la dimostrazione seguente ?

$$\frac{\frac{A, A^\perp \quad B, B^\perp}{A \otimes B, A^\perp, B^\perp} \otimes \quad \frac{B, B^\perp \quad C, C^\perp}{B^\perp \otimes C^\perp, B, C} \otimes}{A \otimes B, A^\perp \wp B^\perp} \wp \quad \frac{A, A^\perp \quad B^\perp \otimes C^\perp, B, C}{A \otimes B, B^\perp \otimes C^\perp, A^\perp, C} \otimes}{\frac{A \otimes B, B^\perp \otimes C^\perp, A^\perp, C}{A \otimes B, B^\perp \otimes C^\perp, A^\perp \wp C} \wp} \text{cut}$$

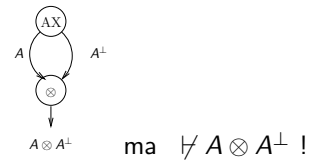
strutture dimostrative vs dimostrazioni

a-priori vorremmo che le strutture dimostrative fossero corrette e complete rispetto al calcolo dei sequenti.

- ▶ **Correttezza:** se π é una struttura dimostrativa con conclusione Γ , allora $\vdash \Gamma$ é dimostrabile nel Calcolo dei Sequenti.
- ▶ **Completezza:** se $\vdash \Gamma$ é dimostrabile nel Calcolo dei Sequenti allora esiste una struttura dimostrativa π con conclusioni Γ .

Problema: ci sono piú strutture dimostrative che dimostrazioni del calcolo dei sequenti; ci sono strutture prive di "senso dimostrativo" (... ma non per questo "insensate"!)

ESEMPIO 5: una struttura di prova con conclusione $A \otimes A^\perp$

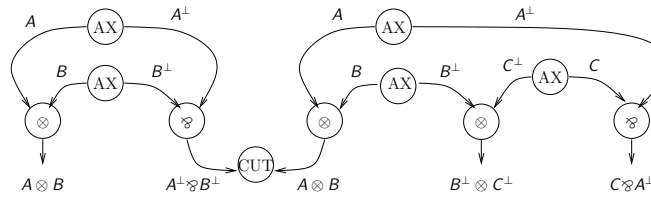


Morale: occorre dunque restringere la nozione di struttura dimostrativa e caratterizzare esattamente quelle che provengono da dimostrazioni del Calcolo dei Sequenti.

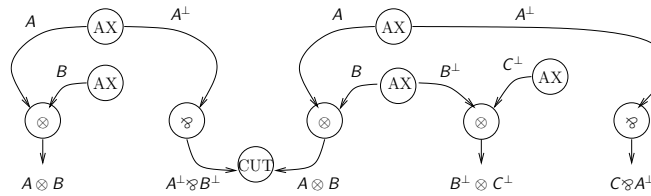
le strutture dimostrative corrette: proof nets (e tests)

- ▶ **Idea interattiva:** consideriamo corrette solo quelle strutture che resistono a tutti gli attacchi o **test**.
- ▶ un **test** τ per una struttura dimostrativa π é il grafo che si ottiene da π mutilando una delle due premesse di ogni legame \wp .
- ▶ **Criterio di Correttezza:** una struttura dimostrativa π é corretta (cioè un **proof-net**) se ogni test é un grafo connesso e aciclico (un albero).
- ▶ OSSERVAZIONE: testare la correttezza di una struttura π richiede a-priori "troppo lavoro": *esponenziale* nel numero dei legami \wp (infatti, se π ha n legami \wp , allora $\exists 2^n$ tests per π);
In pratica, però, il criterio può essere reso più efficiente: in tempo *lineare* nel numero dei legami \wp (si usano *algoritmi di unificazione*).

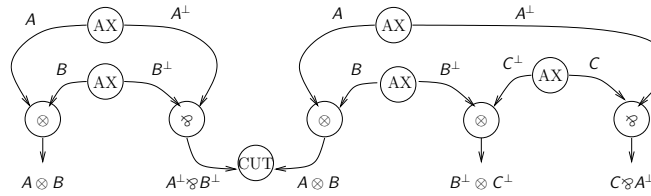
Esempio di rete dimostrativa: resiste ai tests (1/4)



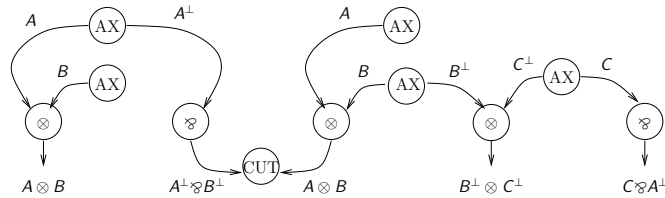
resiste a tutti e 4 i possibili tests:
 il primo test é infatti un grafo connesso e aciclico (un albero)



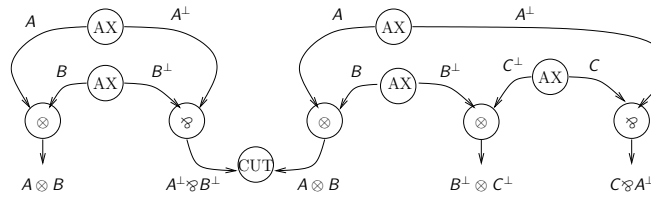
Esempio di rete dimostrativa: resiste ai tests (2/4)



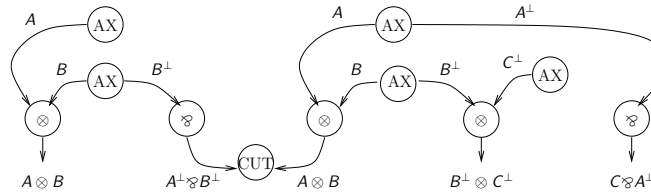
resiste a tutti e 4 i possibili tests:
 il secondo test é infatti un grafo connesso e aciclico (un albero)



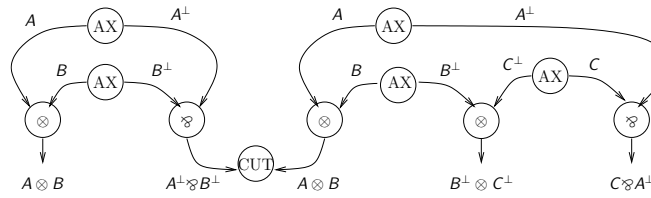
Esempio di rete dimostrativa: resiste ai tests (3/4)



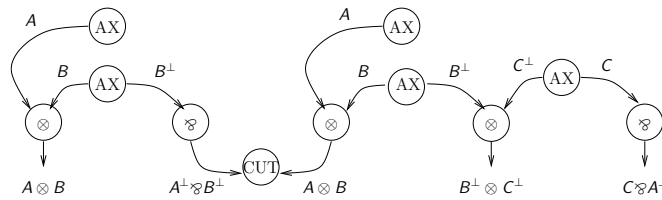
resiste a tutti e 4 i possibili tests:
 il terzo test é un grafo connesso e aciclico (un albero)



Esempio di rete dimostrativa: resiste ai tests (4/4)



resiste a tutti e 4 i possibili tests:
 il quarto ed ultimo test é ancora un grafo connesso e aciclico (un albero)

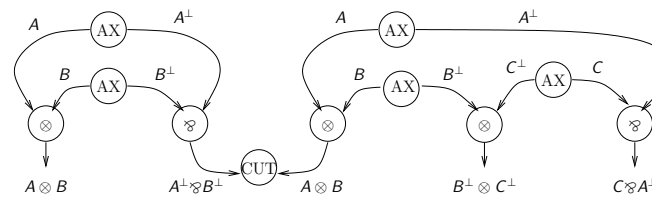


Il Criterio di Correttezza è necessario e sufficiente

- ▶ **TEOREMA [sequenzializzazione]**: ogni dimostrazione Π con conclusioni $\vdash \Gamma$ può essere trasformata in una rete dimostrativa π con le stesse conclusioni e viceversa.
- ▶ **DIMOSTRAZIONE:**
 - ▶ (\Rightarrow) "ogni dimostrazione Π di $\vdash \Gamma$ può essere de-sequenzializzata in una struttura corretta π con le stesse conclusioni".
Dimostrazione facile: per induzione sulla profondità della dimostrazione Π del calcolo dei sequenti.
 - ▶ (\Leftarrow) "ogni struttura corretta π con conclusioni Γ può essere sequenzializzata in una dimostrazione Π di $\vdash \Gamma$ ".
Dimostrazione difficile: per induzione sulla taglia (numero dei nodi) della rete dimostrativa (come esercizio provate il caso con strutture prive di cut).
- ▶ **COROLLARIO [equivalenza sintattica]**: Se due dimostrazioni si de-sequenzializzano nella medesima rete dimostrativa, allora sono equivalenti .

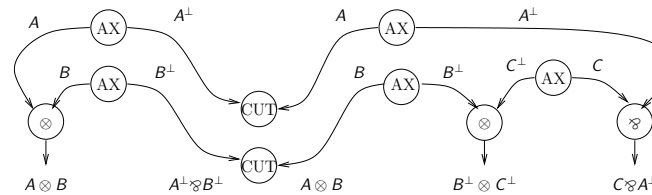
significato computazionale: *Hauptsatz* (1/4)

- ▶ **TEOREMA:** ogni rete dimostrativa con tagli può essere trasformata in una rete con le stesse conclusioni e senza tagli.
- ▶ **DIMOSTRAZIONE:** per induzione sulla complessità logica (numero dei connettivi) delle formule tagliate.
- ▶ **ESEMPIO:** la rete dimostrativa con un solo taglio di complessità 1



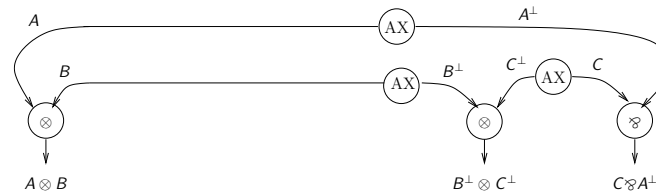
significato computazionale: *Hauptsatz* (2/4)

- ▶ **TEOREMA:** ogni rete dimostrativa con tagli può essere trasformata in una rete con le stesse conclusioni e senza tagli.
- ▶ **DIMOSTRAZIONE:** per induzione sulla complessità logica (numero dei connettivi) delle formule tagliate.
- ▶ **ESEMPIO:** si riduce ad una rete con due tagli di complessità 0



significato computazionale: *Hauptsatz* (3/4)

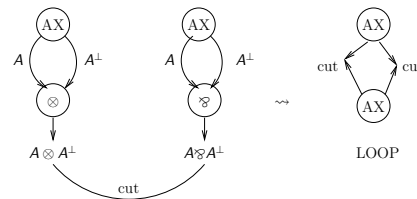
- ▶ TEOREMA: ogni rete dimostrativa con tagli può essere trasformata in una rete con le stesse conclusioni e senza tagli.
- ▶ DIMOSTRAZIONE: per induzione sulla complessità logica (numero dei connettivi) delle formule tagliate.
- ▶ ESEMPIO: che si riduce infine ad una rete priva di tagli (*normale*).



significato computazionale: *Hauptsatz* (4/4)

La procedura di eliminazione del taglio:

- ▶ è **fortemente normalizzante**: termina sempre con la stessa forma normale;
- ▶ è **locale**: solo i nodi immediatamente contigui al cut sono coinvolti;
- ▶ è **concorrente**: i passi di riduzione possono esser eseguiti simultaneamente;
- ▶ **preserva la nozione di struttura di prova**: ma non tutti gli oggetti scorretti hanno un “senso computazionale”;



- ▶ **preserva la correttezza** (proof-net).

fine

- ▶ ESERCITAZIONE: ...
- ▶ PROSSIME LEZIONI:
 - regole strutturali,
 - connettivi additivi ed esponenziali,
 - interazione/applicazioni con/alle altre scienze.
- ▶ Grazie per l'attenzione!