

CP110 a.a. 2015-16 Appello 10 Giugno ^a

Nome : _____

Matricola : _____

Esercizio 1. Si estrae un numero dispari X a caso tra i numeri $\{1, 3, \dots, 9\}$, si tira una moneta equa e si pone $Y = X + 1$ ($Y = X - 1$) se è uscita testa (croce).

- (1) Le variabili X, Y sono indipendenti? La varianza di Y sarà maggiore o minore di quella di X ? [3 punti]
- (2) Calcolare la distribuzione discreta congiunta di X, Y . [4 punti]

Esercizio 2. Ho due monete, una equa e l'altra con $\mathbb{P}(\text{testa}) = 1/3$. Si sceglie una moneta a caso e la si lancia. Sia X la variabile casuale uguale alla probabilità di testa per la moneta scelta e sia $Y = 1$ se la faccia della moneta lanciata è testa, $Y = 0$ altrimenti.

- Calcolare $\mathbb{E}(X | Y)$ e $\mathbb{E}(Y)$. [3 punti]
- Ripetendo l'esperimento $n \gg 1$ volte calcolare approssimativamente $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n Y_i > 5n/12 + \frac{70}{144}\sqrt{n})$. [3 punti]

Esercizio 3. Un punto casuale $P(X, Y)$ viene scelto a caso nel triangolo equilatero di vertici $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1/2, \sqrt{3}/2)$. Calcolare la marginale di X . (Sugg: per simmetria limitarsi a valori $x \in [0, 1/2]$) [4 punti]

Esercizio 4.

- Dimostrare che la somma di due variabili casuali indipendenti $X \sim N(0, 1)$ e $Y = N(1, \sigma^2)$ è ancora una variabile Gaussiana. [4 punti]
- Usando la disuguaglianza di Chebyshev stimare dall'alto la probabilità che dopo n passi una passeggiata aleatoria simmetrica (passi di ± 1 con uguale probabilità) X_n che parte da 0 sia maggiore di n . [3 punti]
- Come si potrebbe migliorare la stima precedente? [3 punti]

Esercizio 5. Sia N_t un processo di Poisson di parametro $\lambda > 0$. Sia T_1 il primo tempo per cui $N_t = 1$. Calcolare la densità di T_1 . [4 punti]

^aNota 1: discutere tutti i passaggi altrimenti non potranno essere assegnati i punti.