

I Esonero di CP110 a.a. 2015-16 ^a

Nome : _____

Matricola : _____

Esercizio 1.

- Si lanciano 3 monete eque. Necessariamente due monete saranno uguali. La terza moneta puo' essere testa/croce con uguale probabilita'. Quindi con il 50% di probabilita' le tre monete saranno uguali (tutte testa o tutte croci). Vero o falso ? [3 punti]
- Si consideri lo spazio di probabilita' (S, \mathbb{P}) , con $S = \{0, 1\}^3$ e $\mathbb{P}(s) = \frac{1}{|S|}$ per ogni $s \in S$. Far vedere che gli eventi $E = \{s = (s_1, s_2, s_3) \in S : s_1 + s_2 > 0\}$ e $F = \{s = (s_1, s_2, s_3) \in S : s_3 = 0\}$ sono indipendenti. [4 punti]

Esercizio 2.

- Definire e dimostrare la formula di Bayes [4 punti]
- k palline sono estratte da una scatola contenente $n \geq k$ palline di cui due speciali. Calcolare la probabilita' che tra le k palline estratte ce ne sia almeno una speciale. [4 punti]

Esercizio 3.

- Definire cosa si intende per variabile casuale X con distribuzione binomiale $B(n, p)$. Verificare che $\frac{d}{dt} \mathbb{E}(e^{tX}) \Big|_{t=0} = np$. [4 punti]
- Quanto vale il piu' grande valore di p tale che $\mathbb{P}(X = k) \leq \mathbb{P}(X = 0)$ per ogni $k = 1, 2, \dots, n$? [3 punti]

Esercizio 4.

Uno scrittore ha una piccola probabilita' di scrivere un refuso ogni volta che scrive una lettera sulla tastiera del suo computer. In media ogni pagina del suo libro ha due refusi. Fare un'ipotesi ragionevole sul processo aleatorio che descrive i refusi e calcolare la probabilita' di avere esattamente 3 pagine senza refusi tra le prime 5 pagine. [5 punti]

Esercizio 5. Data una variabile casuale X discreta sia $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Dimostrare che $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$. [5 punti]

^aNota 1: discutere tutti i passaggi altrimenti non potranno essere assegnati i punti.