

Corso di laurea in Matematica - Anno accademico 2007/2008
CP1 - Calcolo delle probabilità

Docente: Fabio Martinelli

Tutori: Giovanna Catavitello e Daniele Piras

Tutorato 7 del 6 Maggio 2008

ESERCIZIO 1 Sia $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Calcolare $\mathbb{P}(X \geq t)$.

Questa è detta funzione di sopravvivenza della densità esponenziale.

ESERCIZIO 2 Il tempo di vita di un componente elettrico si distribuisce secondo la legge

$$f(t) = ke^{-kt} \chi_{\{t \in (0, +\infty)\}}$$

Se un'apparecchiatura contiene 3 di questi componenti che si guastano indipendentemente l'uno dagli altri, calcolare la probabilità dei seguenti eventi

- i) Nessuno si guasta dopo le prime T ore.
- ii) Esattamente uno si guasta nelle prime T ore, un altro nelle seconde T ed il terzo dopo più di $2T$ ore.
- iii) Un componente si guasta dopo $3T$ ore sapendo che non si è guastato dopo le prime T

ESERCIZIO 3 Ad un centralino telefonico arrivano in media 3 telefonate al minuto. Sia T_n il tempo di arrivo della n -esima telefonata e, per $0 \leq s < t$, sia $N_{[s,t]}$ il numero di telefonate nell'intervallo $[s, t]$. Calcolare:

- i) $\mathbb{P}(T_5 > 2)$ e $\text{Var}(T_5)$
- ii) $\mathbb{E}(N_{[0,3]} + N_{[2,4]})$

ESERCIZIO 4 Supponi che le chiamate che arrivano ad un centralino telefonico, con una media di 3 al minuto, seguano un processo di arrivo di Poisson. Calcolare (Definendo T_n e $N_{[s,t]}$ come sopra):

- i) La probabilità che nessuna chiamata arrivi tra gli istanti $t = 0$ e $t = 2$.
- ii) La probabilità che la prima chiamata dopo l'istante $t = 0$ impieghi più di 2 minuti ad arrivare.
- iii) La probabilità che nessuna chiamata arrivi tra $t = 0$ e $t = 2$ e che al più 4 chiamate arrivino tra $t = 2$ e $t = 3$.
- iv) La probabilità che la quarta chiamata arrivi 30 secondi dopo la terza.
- v) La probabilità che la quinta chiamata impieghi più di due minuti ad arrivare.

ESERCIZIO 5 Sia $X \sim N(0, 1)$. Calcolare la densità delle seguenti variabili casuali

- i) $Y = X^2$. Calcolare inoltre $\mathbb{E}(Y)$.
- ii) $Z = e^X$.
- iii) $W = X^{-1}$

ESERCIZIO 6 Un punto A è scelto uniformemente sull'intersezione del cerchio di raggio $R = 1$ e il I quadrante del piano. Sia X l'ascissa di A . Calcolare la densità di X .

ESERCIZIO 7 Sia $f(x, y) = Cx^2y \chi_{\{(x,y) \in [0,1] \times [0,1]\}}$. Determinare C affinché $f(x, y)$ sia una densità. Determinare inoltre $\mathbb{P}(0 < X < \frac{1}{4}, \frac{1}{6} < Y < \frac{2}{3})$,

ESERCIZIO 8 Sia il punto (X, Y) uniformemente distribuito sul quadrato unitario. Determinare le seguenti probabilità:

- i) $\mathbb{P}(0 < X < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < Y < \frac{4}{3})$.
- ii) $\mathbb{P}(X > Y)$
- iii) $\mathbb{P}(|X - Y| < \frac{1}{4})$
- iv) $\mathbb{P}(|2X - 1| > 1 - Y)$
- v) $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 < 1)$