Corso di laurea in Matematica - Anno accademico 2007/2008

CP1 - Calcolo delle probabilità

`Docente: Fabio Martinelli`

`Tutori: Giovanna Catavitello e Daniele Piras`

`Soluzioni Tutorato 1 del 26 Febbraio 2008`

<u>Esercizio 1</u> Il primo studente darà esattamente $N-1$ schiaffi, il secondo ne darà $N-2$, e così fino all'ultimo, dunque la soluzione è

$$\sum_{j=1}^{N-1} j = \frac{(N-1)N}{2}$$

<u>Esercizio 2</u> Tutte le possibili lettere sono 26, mentre tutti i possibili numeri sono 10, dunque avremo che:

a) Tutte le possibili targhe sono

$$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 = 26^4 \cdot 1000 = 4228488000$$

b) Tutte le possibili targhe pari sono date da

$$26^4 \cdot 500 = 228488000$$

c) Tutte le possibili targhe che contengono la sigla *'CP1'* possiamo calcolarle fissando l'esito di un'esperimento, cioè ora le possibili scelte sono solo su due lettere e due numeri, le altre sono fissate, dobbiamo però aggiungere un fattore $4 \cdot 3$ (che rappresenta le possibili scelte ordinate) perchè abbiamo fissato le lettere *C, P* e un fattore 3 perchè abbiamo fissato il numero 1.

$$4 \cdot 3 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 3 \cdot 10^2 = 2433600$$

d) Per trovare tutte le possibili targhe palindrome basta notare che ora le possibili scelte sono solo sulle prime due lettere e sui primi due numeri, in quanto le altre vengono determinate di conseguenza. Dunque le targhe saranno $26^2 \cdot 10^2 = 67600$

<u>Esercizio 3</u> Gli anagrammi di `ABRACADABRA` non distinti sono $11! = 39916800$ se invece vogliamo quelli distinti dobbiamo dividere per le permutazioni delle lettere che si ripetono, quindi

$$\frac{11!}{5!2!2!} = \frac{39916800}{480} = 83160$$

<u>Esercizio 4</u> Possiamo immaginare le sei persone come una stringa

$$(U, D, D, U, D, U)$$

da ordinare; quindi la soluzione è

a) tutti i possibili modi di disporsi sono tutte le permutazioni della stringa quindi $6! = 720$

b) Se tutti gli uomini e tutte le donne devono stare vicini le possibile stringhe saranno del tipo

$$(D, D, D, U, U, U)\,(U, U, U, D, D, D)$$

dunque le combinazioni sono tutte le permutazioni di queste stringhe, quindi $3!3! + 3!3! = 72$

c) Se tutte le donne devono stare vicine le possibili stringhe sono, oltre le due del punto precedente, anche

$$(U, D, D, D, U, U)\,(U, U, D, D, D, U)$$

Ancora una volta se calcoliamo tutte le possibili permutazioni otteniamo il risultato $72 + 3!3! + 3!3! = 72 + 72 = 144$

d) Se devono stare alternati le stringhe possibili saranno

$$(U, D, U, D, U, D)\,(D, U, D, U, D, U)$$

Quindi avranno ancora 72 possibili modi per mettersi seduti.

<u>Esercizio 5</u> Lo spazio campionario è l'insime delle possibili coppie i cui elementi sono interi positivi compresi tra 1 e 6, quindi

$$\Omega = \{(n, m)|n, m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

Possiamo inoltre schematizzare tutti i possibili esiti in una matrice 6×6 in questo modo

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{pmatrix}$$

Possiamo farlo anche con le somme degli esiti

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

In questo modo diventa molto semplice rispondere alle domande. Infatti poichè il dado è equo lo spazio degli eventi sarà equiprobabile, dunque le probabilità saranno date dal rapporto tra i casi favorevoli ed i casi possibili (che sono $6^2 = 36$), quindi

a) $\mathbb{P}(A) = \frac{10}{36} \cong 0.28$
b) $\mathbb{P}(B) = \frac{9}{36} = 0.25$
c) $\mathbb{P}(C) = \frac{3}{36} \cong 0.08$
d) $\mathbb{P}(D) = \frac{12}{36} \cong 0.3$

<u>ESERCIZIO 6</u> Iniziamo dal caso con rimpiazzo. Lo spazio degli eventi è dato da

$$S = \{(n_1, n_2)|n_i \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \in 1, 2\} = \{1, 2, \ldots, n\}^2$$

Quindi i casi possibili saranno n^2(tutte le coppie in un insieme di n elementi). Poichè S è uno Spazio Campionario equiprobabile, la probabilità di un evento so che questa sarà esattamente casi favorevoli su casi possibili. Dobbiamo allora calcolare i casi favorevoli. Ho due possibilità: se pesco l'elemento i nell'insieme $\{2, 3, \dot{;} n-2, n-1\}$ avrò due possibilità per la seconda pesca, prendere l'elemento $i+1$ o l'elemento $i-1$, se invece pesco i nell'insieme $\{1, n\}$ avrò un solo caso di successo nella pesca successiva ovvero 2 se pesco 1 o $n-1$ se pesco n; casi favorevoli totali sono dunque $2 \times (n-2) + 1 \times 2$. Dunque la probabilità sarà

$$\frac{2 \cdot (n-2) + 2}{n^2} = \frac{2n-2}{n^2}$$

Nel caso senza rimpiazzo i casi favorevoli non cambiano ma, cambiando lo spazio campionario, cambiano i casi possibili. Infatti ora tutti i possibili esiti saranno $n \times (n-1)$, in quanto per la seconda estrazione avremo un biglietto in meno. Dunque la probabilità sarà

$$\frac{2 \cdot (n-2) + 2}{n \cdot (n-1)} = \frac{2}{n}$$

<u>ESERCIZIO 7</u> La soluzione segue dal fatto che $\Omega = \Omega \cup \emptyset$ e che inoltre $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$, dunque

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset) = 1 + \mathbb{P}(\emptyset) \Rightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

<u>ESERCIZIO 8</u> Posso ricondurre questo problema ad uno di probabilità, ovvero, posto $M = \#$ soci: Qual è la probabilità che scegliendo a caso un socio esso pratichi almeno uno sport? Poichè lo spazio è equiprobabile la probabilità sarà data dal rapporto tra i casi favoroli ed i casi possibili, cioè dal numero di soci che praticano almeno uno sport diviso per il numero totale dei soci. Definiamo allora i seguenti insiemi $T' = \{$ Soci che praticano il tennis$\}$, $G =' \{$Soci che praticano il golf$\}$,$N' = \{$Soci che praticano il nuoto$\}$. Dobbiamo calcolare $\#\{T \cup N \cup G\}$, ma questa è data dalla probabilità di pescare un socio che pratica almeno uno sport scegliendo a caso un socio del club. Definiamo allora i seguenti

eventi $T = \{$Scelgo un socio che pratica il tennis$\}$, $G = \{$Scelgo un socio che pratica il golf$\}$, $N = \{$Scelgo un socio che pratica il nuoto$\}$, dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(T \cup G \cup N)$. Possiamo farlo tramite l'espansione a tre eventi della formula

$$\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$$

Avremo che

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) +$$

$$+\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

e dunque

$$\mathbb{P}(T \cup G \cup N) = \frac{36 + 28 + 18 - 22 - 12 - 9 + 4}{M} = \frac{43}{M}$$

Quindi i soci che praticano almeno uno sport saranno

$$\frac{\#\{T' \cup G' \cup N'\}}{M} = \frac{\frac{43}{M}}{M} = 43$$

<u>Esercizio 9</u> La domanda del problema è sostanzialmente equivalente a chiedere se una dellle tre trottole è "privilegiata", nel senso che abbia maggiore probabiltà di battere le restanti. In tal caso vorremmo dunque essere il giocatore X per sceglire per primi la trottola "privilegiata". Calcolando i casi favorevoli su quelli possibili osserviamo però che la trottola A ha probabilità $\frac{5}{9}$ di vincere B che a sua volta ha probabilità $\frac{5}{9}$ di vincere C che a sua volta ha probabilità $\frac{5}{9}$ di vincere su A. Dunque ci troviamo in una situazione circolare dove non esiste una trottola privilegiata perchè la prima trottola ha maggiore probabilità di vincere la seconda, la seconda ha maggiore probabilità di vincere la terza e la terza ha maggiore probabilità di vincere la prima. Tuttavia possiamo osservare che, comunque viene scelta una trottola dal primo giocatore, è sempre possibile sceglierne una che vinca in 2 casi su 3. In conclusione conviene essere il giocatore Y.