Corso di laurea in Matematica - Anno accademico 2007/2008

CP1 - Calcolo delle probabilità

`Docente: Fabio Martinelli`

`Tutori: Giovanna Catavitello e Daniele Piras`

`Soluzioni Tutorato 3 del 11 Marzo 2008`

<u>Esercizio 1</u> Per prima cosa $A_i \cap A_j = \{x_1 = x_2 = x_3\} \, \forall i \neq j$ con $i, j = 1, 2, 3$, e questo evento ha probabilità $1/16$; infatti poichè lo spazio campionario è equiprobabile (i tetraedri sono equi) abbiamo 4 casi favorevoli (cioè tutti i possibili esiti del primo lancio, mentre per i lanci 2 e 3 gli esiti sono fissati) su 64 possibili (tutti i possibili esiti sono $4^3 = 64$). Inolte ogni singolo evento A_j ha probabilità $1/4$, basta ragionare come sopra, ovvero 4 casi favorevoli su 16 possibili. Dunque $\forall \, i \neq j$ con $i, j \in \{1, 2, 3\}$ si ha

$$\mathbb{P}(A_j \cap A_i) = \frac{1}{16} = \frac{1}{4}\frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_j)\,\mathbb{P}(A_i)$$

e quindi gli eventi sono a due a due indipendenti. Tuttavia $\{A_1, A_2, A_3\}$ non è una famiglia di eventi indipendenti perchè, notato che $\{A_1 \cap A_2 \cap A_3\} = \{A_1 \cap A_2\} = \{A_2 \cap A_3\} = \{A_3 \cap A_1\}$ si ha

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{16} \neq \frac{1}{4^3} = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}(A_3)$$

<u>Esercizio 2</u> Come sempre facciamo la tabella degli esiti

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{pmatrix}$$

Da questa è possibile vedere che $\mathbb{P}(A_4) = 1/6$, $\mathbb{P}(C_4) = 1/4$ e che $\mathbb{P}(A_4 \cap C_4) = 1/36$ quindi gli eventi non sono indipendenti. Mentre $\mathbb{P}(A_2) = 1/2$, $\mathbb{P}(C_3) = 1/3$ e $\mathbb{P}(A_2 \cap C_3) = 1/6$ quindi gli eventi A_2, C_3 sono indipendenti.
In conclusione, poichè ci sono dei valori di j e k tali che gli eventi A_j e C_k sono indipendenti, ed altri per cui non lo sono, in generale questi eventi non sono indipendenti.

<u>Esercizio 3</u> Poniamo $n = \#$ ragazze del secondo anno. Affinche la scelta sia indipendente, n deve essere tale che $\mathbb{P}(M \cap I) = \mathbb{P}(M)\,\mathbb{P}(I)$ se $M = \{$Scelgo a caso uno studente maschio $\}$ e $I = \{$Scelgo a caso uno studente del primo anno $\}$. Poichè

$$\mathbb{P}(M \cap I) = \frac{4}{16+n} \quad \mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(I) = \frac{10}{16+n}$$

Otteniamo l'uguaglianza se e solo se $n = 9$.
Nota: Va bene una qualsiasi condizione. Ad esempio $\mathbb{P}(F \cap II) = \mathbb{P}(F)\,\mathbb{P}(II)$ se $F = \{$Scelgo a caso uno studente femmina $\}$ e $II = \{$Scelgo a caso uno studente del secondo anno $\}$.

ESERCIZIO 4 L'affermazione $a)$ è falsa; infatti se A, B sono disgiunti si ha che $0 = \mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$ in quanto quest'ultima probabilità è strettamente positiva perchè lo sono sia $\mathbb{P}(A)$ che $\mathbb{P}(B)$.
L'affermazione $b)$ è falsa perchè se gli eventi sono indipendenti ed entrambi di probabilità positiva si ha che $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) > 0$ quindi non possono essere disgiunti.
Anche l'affermazione $c)$ è falsa. Infatti se A, B fossero disgiunti ed entrambi avessero probabilità pari a $0,6$ si avrebbe che
$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 0,6 + 0,6 = 1,2$ ma questo è impossibile perchè contraddice gli assiomi della probabilità.
L'affermazione $d)$ invece può essere vera.

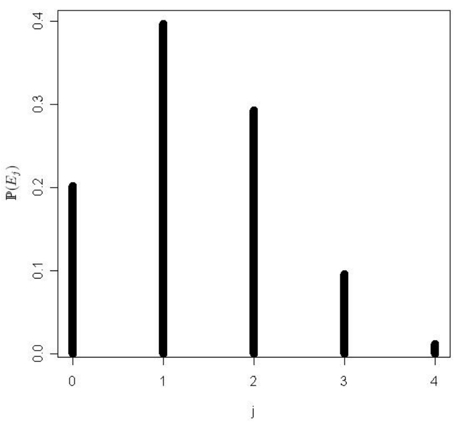
ESERCIZIO 5 La soluzione è

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

ESERCIZIO 6 La probabilità di estrarre una pallina bianca è $4/12$ ovvero $1/3$. Quindi $\forall\, j = 0, 1, ..., 4$ si ha

$$\mathbb{P}(E_j) = \binom{4}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^j \left(\frac{2}{3}\right)^{4-j} \cong \begin{cases} 0{,}20 & \text{se j=0} \\ 0{,}40 & \text{se j=1} \\ 0{,}29 & \text{se j=2} \\ 0{,}10 & \text{se j=3} \\ 0{,}01 & \text{se j=4} \end{cases}$$

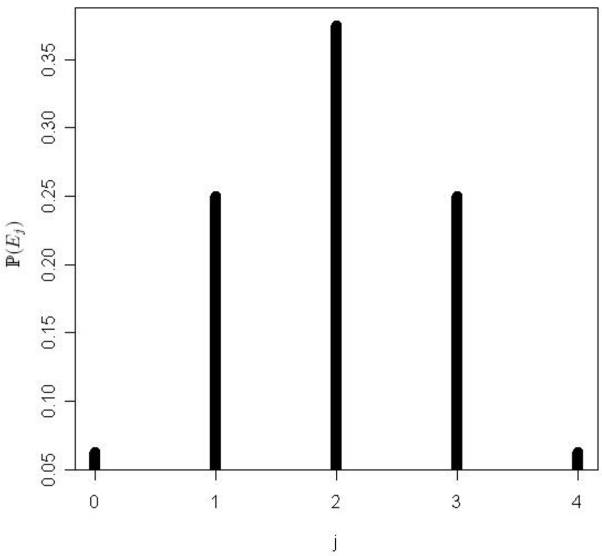
Rappresentato graficamente si ha



Se ora inseriamo nell'urna 4 palline rosse anzichè 8 otteniamo che le probabilità sono a due a due uguali, cioè otteniamo

$$\mathbb{P}(E_j) = \begin{pmatrix} 4 \\ j \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{4-j} = \begin{pmatrix} 4 \\ j \end{pmatrix} \frac{1}{2^4} = \begin{cases} 0{,}0625 & \text{se j=0} \vee \text{j=4} \\ 0{,}25 & \text{se j=1} \vee \text{j=3} \\ 0{,}375 & \text{se j=2} \end{cases}$$

Ritracciando il grafico in questa configurazione si nota ancora meglio la simmetria delle probabilità



ESERCIZIO 7 Per prima cosa possiamo notare che per qualsiasi n si ha che $\mathbb{P}(E_i) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}$. Dunque otteniamo che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^k = \frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{5}{6}} = 1$$

Da questo si può dedurre che l'evento $\bigcup_{j\geq 1} E_j$ è un evento certo.
Per la soluzione della parte facoltativa sia $p = 1/6$ e $q = 1 - p = 5/6$.

$$\sum_{i\geq 1} i\mathbb{P}(E_i) = p\sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1} = p\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dq}(q^i) =$$

$$= p\frac{d}{dq}\left(\sum_{i=1}^{\infty} q^i\right) = p\frac{d}{dq}\left(\sum_{i=0}^{\infty} q^i\right) =$$

$$= p\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}\right) = p\left(\frac{1}{(1-q)^2}\right) = p\left(\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{p}$$

Nota: La notazione $\frac{d}{dq}f(q)$ denota la derivata della funzione f rispetto la variabile q.