Corso di laurea in Matematica - Anno accademico 2007/2008

CP1 - Calcolo delle probabilità

`Docente: Fabio Martinelli`

`Tutori: Giovanna Catavitello e Daniele Piras`

`Soluzioni Tutorato 4 del 19 Marzo 2008`

<u>Esercizio 1</u> Per definizione si ha che se X è una variabile casuale con $\mathbb{E}(X) = \mu$ $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mu)^2\right)$, quindi

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mu)^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2 - 2\mu X + \mu^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\mu\mathbb{E}(X) + \mu^2 =$$

$$= \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\mu^2 + \mu^2 = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mu^2$$

<u>Esercizio 2</u> Indichiamo con p la probabilità che una variabile casuale assuma tale valore.

i) La variabile X ha la seguente distribuzione

$$X = \begin{cases} 2 & \text{p=1/9} \\ 3 & \text{p=2/9} \\ 4 & \text{p=1/3} \\ 5 & \text{p=2/9} \\ 6 & \text{p=1/9} \end{cases}$$

Inoltre $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=2}^{6} n\mathbb{P}(X = n) = 4$ e $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mu^2$. Calcoliamo allora $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum_{n=2}^{6} n^2\mathbb{P}(X = n) \cong 17,3$. Dunque si ha che $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mu^2 = 17,3 - 16 \cong 1,3$

ii) Le distribuzioni sono

$$\text{X}=\begin{cases} 0 & \text{p=6/36} \\ 1 & \text{p=10/36} \\ 2 & \text{p=8/36} \\ 3 & \text{p=6/36} \\ 4 & \text{p=4/36} \\ 5 & \text{p=2/36} \end{cases} \qquad \text{Y}=\begin{cases} 1 & \text{p=11/36} \\ 2 & \text{p=9/36} \\ 3 & \text{p=7/36} \\ 4 & \text{p=5/36} \\ 5 & \text{p=3/36} \\ 6 & \text{p=1/36} \end{cases}$$

Inoltre si ha $\mathbb{E}(X) = 1,72$ $\mathrm{Var}(X) = 2,82$ e $\mathbb{E}(Y) = 2,52$ $\mathrm{Var}(Y) = 4,2$

iii) La distribuzione di X è

$$X = \begin{cases} -3 & \text{p=1/8} \\ -1 & \text{p=3/8} \\ 1 & \text{p=3/8} \\ 3 & \text{p=1/8} \end{cases}$$

Con $\mathbb{E}(X) = 0$ e $\mathrm{Var}(X) = 3$

ESERCIZIO 3 La distribuzione della variabile casuale X è data nel testo ed è

$$X = \begin{cases} 0 & \text{p=20/40} \\ 2 & \text{p=4/40} \\ 3 & \text{p=4/40} \\ 4 & \text{p=4/40} \\ 10 & \text{p=4/40} \\ 11 & \text{p=4/40} \end{cases}$$

Quindi si ha che

$$\mathbb{E}(X) = 0\frac{20}{40} + 2\frac{4}{40} + 3\frac{4}{40} + 4\frac{4}{40} + 10\frac{4}{40} + 11\frac{4}{40} = \frac{2+3+4+10+11}{10} = 3$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X^2\right) &= 0\frac{20}{40} + 4\frac{4}{40} + 9\frac{4}{40} + 16\frac{4}{40} + 100\frac{4}{40} + 121\frac{4}{40} = \\ &= \frac{4+9+16+100+121}{10} = 25 \end{aligned}$$

Dunque $\mathrm{Var}(X) = 25 - 9 = 16$

ESERCIZIO 4 Detta X la variabile casuale che conta le teste nei 5 lanci, si ha che se $j \in \{0, 1, \ldots, 5\}$

$$\mathbb{P}(X = j) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ j \end{array}\right) (0,7)^j (0,3)^{5-j}$$

Quindi le probabilità sono

i) $\mathbb{P}(X = 2) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array}\right) (0,7)^2 (0,3)^3 = 0,1323$

ii) $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \left(\begin{array}{c} 5 \\ 0 \end{array}\right) (0,7)^0 (0,3)^5 = 0,99757$

ii) $\mathbb{P}(X \geq 3) = \sum_{j=3}^{5} \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=3}^{5} \left(\begin{array}{c} 5 \\ j \end{array}\right) (0,7)^j (0,3)^{5-j} = 0,3087 + 0,36015 + 0,16807 = 0,83692$

Per calcolare il numero atteso di teste resta da calcolare $\mathbb{P}(X = 1)$ e poi

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{5} n\mathbb{P}(X = n) = 3,5$$

La variabile casuale X è una binomiale e più precisamente $X \sim Bin(5, 0.7)$

ESERCIZIO 5 Per prima cosa notiamo che $\mathbb{E}(Y) = 100 \Leftrightarrow \mathbb{E}(X_1) = 1$ per linearità della media e perchè le X_j hanno tutte la stessa distribuzione, cioè

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{100} X_j\right) = \sum_{j=1}^{100} \mathbb{E}(X_j) = 100\mathbb{E}(X_1)$$

Quindi si deve avere che

$$1 = \mathbb{E}(X_1) = 0,25 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot p \Leftrightarrow p = 0,05$$

Per la prima stima utilizziamo la disuguaglianza di Markov che ci dice che

$$\mathbb{P}(Y \geq 115) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{115} = \frac{100}{115} \cong 0,87$$

Per la seconda basta osservare che

$$\mathbb{P}(86 \leq Y \leq 114) = 1 - \mathbb{P}(|Y - 100| \geq 15)$$

Poichè per Chebyshev si ha che

$$\mathbb{P}(|Y - 100| \geq 15) \leq \frac{\mathrm{Var}(Y)}{15^2} = \frac{90}{225}$$

Allora

$$\mathbb{P}(86 \leq Y \leq 114) = 1 - \mathbb{P}(|Y - 100| \geq 15) \geq 1 - \frac{90}{225} = \frac{135}{225} = 0,6$$

<u>Esercizio 6</u> Definiamo gli eventi $A = \{$estraggo un dado truccato $\}$ e $B = \{$estraggo un dado equo$\}$. Si ha dunque che $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 3|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(X = 3|B)\,\mathbb{P}(B) = \frac{1}{10}\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\frac{1}{2} = \frac{2}{15}$. Quello che possiamo notare è che $\forall\ k \in \{2,4,5,6\}$ si ha che $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = 3)$ perchè le cifre 2,3,4,5 e 6 sono equiprobabili nei dadi truccati. Quindi si ha che $\mathbb{P}(X = 1) = 1 - 5\mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{3}$. Dunque

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3} + \frac{4 + 6 + 8 + 10 + 12}{15} = 3$$

Sia ora $C = \{X_1 = 2, X_2 = 3\}$. Con gli eventi definiti in questo modo la probabilità da trovare è $\mathbb{P}(A|C)$. Per Bayes si ha

$$\mathbb{P}(A|C) = \frac{\mathbb{P}(C|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mathbb{P}(C)}$$

Calcoliamo allora $\mathbb{P}(C)$

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C|B)\,\mathbb{P}(B) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathbb{P}(X_1 = 2|A)\,\mathbb{P}(X_2 = 3|A) + \mathbb{P}(X_1 = 2|B)\,\mathbb{P}(X_2 = 3|B)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{36}\right) = \frac{17}{900}$$

Allora

$$\mathbb{P}(A|C) = \frac{1}{100}\frac{1}{2} \cdot \frac{900}{17} = 0,26$$

<u>Esercizio 7</u> L'espressione di X_2 e X_1 in funzione di A è

$$X_2 - X_1 = 2\sqrt{1-A}$$

Dunque si ha che

$$\mathbb{E}\left(X_2 - X_1\right) = \mathbb{E}\left(2\sqrt{1-A}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{6}}}\right) =$$

$$= \frac{9\sqrt{2} + 4\sqrt{6} + \sqrt{30}}{18}$$

Per calcolare la varianza calcoliamo prima

$$\mathbb{E}\left(\{X_2 - X_1\}^2\right) = 4\mathbb{E}\left(1 - A\right) = \frac{22}{9}$$

Quindi

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{22}{9} - \left(\frac{9\sqrt{2} + 4\sqrt{6} + \sqrt{30}}{18}\right)^2$$

<u>Esercizio 8</u> Se indichiamo con X la variabile aleatoria che conta il numero di utenti connessi si ha che $X \sim Bin(24, 0.6)$. Dunque la probabilità richiesta è:

$$P(X \geq 20) = \sum_{j=20}^{24} \binom{24}{j} (0,6)^j (0,6)^{10-j} = 0.0135$$

<u>Esercizio 9</u>

$$\mathbb{P}\left(X_p \leq i\right) = \sum_{k=0}^{i} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=n-i}^{n} \binom{n}{k} q^k p^{n-k} =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{n-i-1} \binom{n}{k} q^k p^{n-k} = 1 - \mathbb{P}\left(X_q \leq n-i-1\right)$$