

Mathematics - Academic year 2008/2009

## CP1: 7<sup>th</sup> practical class

Lecturer: Prof. Fabio Martinelli

Tutors: mr Michele Salvi and mr Daniele Piras

7<sup>th</sup> practical class May 14<sup>th</sup> 2009

*'Karma police, arrest this man, he talks in maths'*

RADIOHEAD

**Exercise 1** Let  $r, \lambda$  be positive real numbers and let  $f(x) = cx^{-(\lambda+1)}\chi_{\{x>r\}}$ .

- i) Find  $c$  such that  $f$  is the density of a random variable.
- ii) Let  $X$  be a random variable with density function  $f$ ; for which values of  $\lambda$  do the mean and the variance exist?
- iii) Find the density function of the variable  $Y := \log X$ .

**Exercise 2** Let  $X$  be a random variable with density function ( $\theta \in \mathbb{R}^{++}$ ):

$$f(x) := \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} \chi_{\{x>0\}}$$

- i) Calculate mean and variance of  $X$
- ii) Show that  $Z := X^2$  is a  $\Gamma(\alpha, \lambda)$  and find  $\alpha$  and  $\lambda$ .
- iii) Find the density function of  $W := e^{-\frac{X^2}{\theta}}$ . (Hint: use (ii))

**Exercise 3** Suppose calls are coming into a telephone exchange at an average rate of 3 per minute, according to a Poisson arrival process. Calculate:

- i) The probability that no calls arrive between  $t = 0$  and  $t = 2$  and at most four calls arrive between  $t = 2$  and  $t = 3$ .
- ii) The probability that the 4th call arrives within 30sec of the third.
- iii) The probability that the 5th call takes more than 2min to arrive.

**Exercise 4** A random point  $P$  is uniformly chosen in the intersection of the circumference of radius  $R = 1$  and  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$ . Let  $X$  be the abscissa of  $P$ . Find the density function of  $X$ .

**Exercise 5** Let  $\mathcal{U}_1$  and  $\mathcal{U}_2$  be r. v. uniformly distributed in  $[0, 1]$  and let

$$X = \min\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2\} \quad Y = \max\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2\}$$

- i) Find the density functions  $f_X(x)$  and  $f_Y(y)$  of  $X$  and  $Y$ .
- ii) Find the density function and the mean value of  $W = \frac{1}{Y^2}$ .

**Exercise 6** The joint distribution of  $X$  and  $Y$  is

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} C \cos(x) \cos(y) & 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- i) Find  $C$  and calculate  $\mathbb{E}[Y]$ .
- ii) Are  $X$  and  $Y$  independent?

LE (IM)PROBABILISTICHE AVVENTURE DEL SIG.TREMILLANI

### Capitolo 7: Ross relativo

Non vogliamo raccontarvi l'inarrestabile ascesa del sig.Tremillani in ambito accademico di quegli anni. Vi mostreremo, invece, l'altra faccia della medaglia, la parte più triste ed oscura, in tutti i sensi, della sua storia. Torniamo ai suoi problemi di vista ai tempi del call center. La situazione continuava a peggiorare, tanto da far diventare il povero sventurato talmente maldestro e impacciato nei movimenti da continuare a rimediare traumi cranici e contusioni di ogni tipo. Ovviamente questo lo obbligava a chiedere giorni di malattia, facendogli assentare dal lavoro. L'ing.Audi, non un patito dei diritti dei lavoratori e per di più convinto che il brillante Tremillani stesse tramando per fargli le scarpe, colse la palla al balzo e lo licenziò in tronco. Il signor Tremillani, furioso per il benservito e d'altra parte spaventato per il progressivo annebbiamento delle percezioni ottiche, investì i quattro spicci della liquidazione per concedersi una visita da uno specialista. Il metodo Pigretti<sup>©</sup> per la valutazione della vista di Aniello, detto Nello, Pigretti era piuttosto particolare: consisteva in una prova di tiro con l'arco dalla quale si sarebbe dedotto lo stato della vista del paziente. In fondo al lunghissimo studio del Pigretti campeggiava un grosso bersaglio di paglia di forma quadrata di un metro per un metro; sul tabellone comparivano altri due quadrati concentrici, il più piccolo di  $25\text{cm} \times 25\text{cm}$  e quello intermedio di  $50 \times 50$ . "Ha a disposizione due frecce per fare il punteggio più alto possibile. La mira di un umano -spiegò il Pigretti- può essere approssimata da due curve gaussiane, una che regola l'altezza del lancio, l'altra la sua componente orizzontale. Queste due gaussiane indipendenti, centrate nel centro del bersaglio, hanno una stessa deviazione standard  $\sigma$  che vale, in centimetri,  $\frac{50}{x}$ , dove  $x$  sono le diottrie del paziente. E' come dire che un cieco ha varianza infinita, e quindi potrebbe tirare ovunque, mentre un occhio di falco ha grandissime probabilità di fare centro". Se il centro valeva 30 punti, il quadrato intermedio 20 e quello più grande 10, **quante diottrie doveva avere il Tremillani affinché la probabilità di fare almeno 50 punti superassero  $\frac{3}{4}$** ? Purtroppo l'esito della prova di Tremillani (ripetuta più volte per poter mediare i risultati ottenuti) furono catastrofici: solo in un paio di occasioni sui venti tentativi riuscì a colpire il quadrato più grande. Aniello Pigretti, da grande professionista qual era, non cercò giri di parole: "Lei sta diventando cieco"...