

Corso di laurea in Matematica - Anno accademico 2007/2008
CP1 - Calcolo delle probabilità

Docente: Fabio Martinelli

Tutori: Giovanna Catavittello e Daniele Piras

Tutorato 5 del 22 Aprile 2008

ESERCIZIO 1 Determinare la costante C (se esiste) affinché le seguenti funzioni siano densità di probabilità:

i) $f_X(x) = x(C - x^2) \chi_{\{x \in [0,2]\}}$

ii) $f_X(x) = Cx^n e^{-x} \chi_{\{x \in [0,+\infty)\}}$

iii) $f_X(x) = C \sin x \chi_{\{x \in [-\pi, \pi]\}}$

ESERCIZIO 2 Determinare le costanti α e β affinché le seguenti funzioni siano densità di probabilità, sapendo che in entrambi i casi $\mathbb{E}(X) = 0$

i) $f_X(x) = \begin{cases} \alpha & -1 \leq x \leq 0 \\ \beta x & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

ii) $f_X(x) = \alpha + \beta x^2 \chi_{\{x \in (0,1)\}}$

ESERCIZIO 3 Sia $Y \sim U(0, 5)$. Calcolare la probabilità che siano reali le radici dell'equazione

$$4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$$

ESERCIZIO 4 Uno studente arriva alla fermata dell'autobus alle 8. Sapendo che l'istante di arrivo dell'autobus è uniformemente distribuito tra le 8 e le 8:30, qual è la probabilità che debba aspettare più di 10 minuti? Se l'autobus non è ancora passato alle 8:15, qual è la probabilità che debba aspettare altri 10 minuti?

ESERCIZIO 5 Una formica passeggia in una stanza di dimensioni $5 \times 4 \times 3$ (dove 3 è l'altezza). Se la si guarda in un istante a caso, qual è la probabilità che la formica sia sul soffitto? E sulle pareti? Se una mosca vola nella stessa stanza qual è la probabilità che voli ad almeno un metro di distanza dalle pareti?

ESERCIZIO 6 Sia $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Calcolare $\mathbb{E}(X)$ e $\text{Var}(X)$.

ESERCIZIO 7 Sia $Z \sim N(0, 1)$ provare che se $x > 0$

i) $\mathbb{P}(Z > x) = \mathbb{P}(Z < -x)$

ii) $\mathbb{P}(|Z| > x) = 2\mathbb{P}(Z > x)$

Ed esprimere le uguaglianze in termini di $\varphi(x)$

ESERCIZIO 8 Una ditta crea lampadine la cui durata in ore si distribuisce come $D \sim N(500, 64)$. Calcolare

i) $\mathbb{P}(480 \leq D \leq 490)$

ii) $\mathbb{P}(|D - 500| \geq 20)$

ESERCIZIO 9 Le variabili casuali X e Y sono indipendenti e distribuite con legge normale rispettivamente di parametri $\mu_X = 0$, $\sigma_X^2 = 1$ e $\mu_Y = 0$, $\sigma_Y^2 = 2$. Calcolare la probabilità che il punto aleatorio $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ cada nelle regioni

i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 2\}$

ii) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}$