Corso di laurea in Matematica - Anno accademico 2007/2008

CP1 - Calcolo delle probabilità

`Docente: Fabio Martinelli`

`Tutori: Giovanna Catavitello e Daniele Piras`

`Soluzioni Tutorato 2 del 4 Marzo 2008`

<u>Esercizio 1</u> Per prima cosa definiamo gli eventi $N = \{$estraggo un sasso nero $\}$ $B = \{$ estraggo un sasso bianco $\}$ e $S_i = \{$ estraggo un sasso dalla scatola $i-$esima $\}$ per $i = 1, 2$. A questo punto dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(N)$.Siccome $S_1 \cup S_2$ è un evento certo ($\Leftrightarrow \mathbb{P}(S_1 \cup S_2) = 1$)Con il teorema delle probabilità totali troviamo che

$$\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(N|S_1)\,\mathbb{P}(S_1) + \mathbb{P}(N|S_2)\,\mathbb{P}(S_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$$

La seconda domanda ci chiede di trovare $\mathbb{P}(S_1|B)$. Per definizione di probabilità condizionata abbiamo che

$$\mathbb{P}(S_1|B) = \frac{\mathbb{P}(S_1 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(S_1 \cap B)}{1 - \mathbb{P}(N)} = \frac{1/4}{5/12} = \frac{3}{5}$$

<u>Esercizio 2</u> Innanzitutto scriviamo lo spazio campionario. Possiamo immaginarlo come stringhe di cinque caratteri dove ogni carattere è una F per le figlie femmine o equivalentemente una M per i figli maschi. Dunque

$$\Omega = \{(L_1, L_2, L_3, L_4, L_5)|L_i \in \{F, M\} \text{ con } i = 1, \ldots, 5\}$$

Quindi avremo che $|\Omega| = 2^5 = 32$. Per calcolare le probabilità andiamo a calcolare quindi i casi favorevoli

a) Per avere tutti i figli dello stesso sesso abbiamo due casi possibili, cioè le stringhe (M, M, M, M, M) e (F, F, F, F, F). Dunque la probabilità sarà

$$\frac{2}{32} = \frac{1}{16} = 0,0625$$

b) Affinchè i tre più vecchi siano maschi e le altre femmine abbiamo una sola possibiltà data dalla sringa (F, F, M, M, M) dunque la probabilità sarà

$$\frac{1}{32} = 0,03125$$

c) Nel caso di esattamente tre figli maschi i casi favorevoli saranno dati da $\left(\begin{array}{c}5\\3\end{array}\right)$ dunque avremo che

$$\frac{\left(\begin{array}{c}5\\3\end{array}\right)}{32} = \frac{10}{32} = 0,3125$$

d) Per trovare la probabilità che i due figli più vecchi siano femmine possiamo notare che la richiesta è solo sugli ultimi due figli, i quali devono essere due femmine. Quindi se ripensiamo alle stringhe di 5 lettere, i casi favorevoli saranno quelle stringhe che terminano con 2 caratteri F e gli altri sono liberi di variare. Poichè le stringhe di tre lettere con due possibilità per ogni lettera sono $2^3 = 8$ avremo che la probabilità è

$$\frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 0,25$$

e) Calcolare la probabilità che ci sia almeno una femmina nei 5 figli è molto lungo, tuttavia è molto semplice calcolare la probabilità del complementare, cioè che nei 5 figli non ci sia nemmeno una femmina. Questa è data da $1/32$ (vedi es.1), dunque la probabilità cercata è

$$1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32} \cong 0,96$$

<u>Esercizio 3</u> Per definizione di probabilità condizionata abbiamo che

$$\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$$

Sviluppiamo ora solo il numeratore

$$\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E \cap F \cap (\Omega)) = \mathbb{P}(E \cap F \cap (G \cup G^c)) =$$
$$\mathbb{P}((E \cap F \cap G) \cup (E \cap F \cap G^c)) = = \mathbb{P}(E \cap F \cap G) + (E \cap F \cap G^c) =$$
$$= \mathbb{P}(E|F \cap G)\,\mathbb{P}(F \cap G) + E|F \cap G^c\mathbb{P}(F \cap G^c =)$$
$$= \mathbb{P}(E|F \cap G)\,\mathbb{P}(G|F)\,\mathbb{P}(F) + E|F \cap G^c\mathbb{P}(G^c|F)\,\mathbb{P}(F)$$

Semplificando $\mathbb{P}(F)$ otteniamo la tesi, ovvero

$$\mathbb{P}(E|F) = \mathbb{P}(E|F \cap G)\mathbb{P}(G|F) + \mathbb{P}(E|F \cap G^c)\mathbb{P}(G^c|F)$$

<u>Esercizio 4</u> Per prima cosa definiamo $A = \{$L'opuscolo è della prima edizione$\}$, $B = \{$L'opuscolo è della seconda edizione$\}$ e $C = \{$Due pagine su tre contengono errori$\}$. Fatto questo la probabilità da trovare è $\mathbb{P}(A|C)$. Usando la formula di Bayes troviamo che

$$\mathbb{P}(A|C) = \frac{\mathbb{P}(C|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(C|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C|B)\,\mathbb{P}(B)}$$

Calcoliamo allora $\mathbb{P}(C|A)$ e $\mathbb{P}(C|B)$

$$\mathbb{P}(C|A) = \frac{\binom{15}{2}\binom{10}{1}}{\binom{25}{3}} = \frac{21}{46}$$

$$\mathbb{P}\left(C|B\right)=\frac{\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}25\\3\end{pmatrix}}=\frac{2}{23}$$

Quindi la probabilità cercata è

$$\mathbb{P}\left(A|C\right)=\frac{\mathbb{P}\left(C|A\right)\mathbb{P}\left(A\right)}{\mathbb{P}\left(C|A\right)\mathbb{P}\left(A\right)+\mathbb{P}\left(C|B\right)\mathbb{P}\left(B\right)}=\frac{\frac{21}{46}\frac{10}{15}}{\frac{21}{46}\frac{10}{15}+\frac{2}{23}\frac{5}{15}}=\frac{21}{23}$$

Esercizio 5 Definiamo i seguenti eventi $J=\{\text{Il prodotto viene dall'impianto } J\}$ per $J=A,B,C$ e $D=\{\text{Il prodotto è difettoso}\}$. Calcoliamo solo $\mathbb{P}\left(A|D\right)$, le altre si calcolano in modo analogo.

$$\mathbb{P}\left(A|D\right)=\frac{\mathbb{P}\left(D|A\right)\mathbb{P}\left(A\right)}{\mathbb{P}\left(D|A\right)\mathbb{P}\left(A\right)+\mathbb{P}\left(D|B\right)\mathbb{P}\left(B\right)+\mathbb{P}\left(D|C\right)\mathbb{P}\left(C\right)}=0,597$$

Le altre probabilità sono: $\mathbb{P}\left(B|D\right)=0,373$ e $\mathbb{P}\left(C|D\right)=0,030$ Nota: non è necessario calcolare tutte e tre le probabiltà, ne basta calcolarne due...

Esercizio 6 Cerchiamo per prima cosa di capire cosa succede al tempo $n-$esimo. Se indichiamo con X_n e Y_n il numero di teste di A e B rispettivamente dopo $n-$lanci, definimo gli eventi $E_1=\{X_n>Y_n\}$, $E_2=\{X_n=Y_n\}$ e
$E_3=\{X_n<Y_n\}$ allora possiamo notare che gli eventi E_i sono disgiunti e che

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{3}E_i\right)=\sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}\left(E_i\right)=1$$

Inoltre per l'indipendenza dei lanci e per l'equità della moneta si ha che $\mathbb{P}\left(E_1\right)=\mathbb{P}\left(E_3\right)$ quindi $1=2\mathbb{P}\left(E_1\right)+\mathbb{P}\left(E_2\right)$. Allora per il teorema delle probabilità totali avremo che, se indichiamo con $F=\{X_{n+1}>Y_n\}$

$$\mathbb{P}\left(F\right)=\mathbb{P}\left(F|E_1\right)\mathbb{P}\left(E_1\right)+\mathbb{P}\left(F|E_2\right)\mathbb{P}\left(E_2\right)+\mathbb{P}\left(F|E_3\right)\mathbb{P}\left(E_3\right)$$

Dove $\mathbb{P}\left(F|E_1\right)=1$ perchè se gia $X_n>Y_n$ sicuramente $X_{n+1}>Y_n$, $\mathbb{P}\left(F|E_3\right)=0$ perchè se $X_n<Y_n$ è impossibile che $X_{n+1}>Y_n$, al più saranno uguali, mentre $\mathbb{P}\left(F|E_2\right)=1/2$ perchè se $X_n=Y_n$ allora $X_n+1>Y_n$ solo se al lancio $(n+1)-$esimo A otterrà una testa, ma questo accade con probabilità $1/2$. Dunque andiamo ora a mettere a sistema le relazioni trovate

$$\begin{cases}\mathbb{P}\left(F\right)=\mathbb{P}\left(F|E_1\right)\mathbb{P}\left(E_1\right)+\mathbb{P}\left(F|E_2\right)\mathbb{P}\left(E_2\right)+\mathbb{P}\left(F|E_3\right)\mathbb{P}\left(E_3\right)\\1=2\mathbb{P}\left(E_1\right)+\mathbb{P}\left(E_2\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbb{P}\left(F\right)=\mathbb{P}\left(E_1\right)+\frac{1}{2}\mathbb{P}\left(E_2\right)\\\mathbb{P}\left(E_2\right)=1-2\mathbb{P}\left(E_1\right)\end{cases}$$

Sostituendo $\mathbb{P}(E_2)$ nella prima equazione troviamo che

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(E_1) + \frac{1}{2}(1 - 2\mathbb{P}(E_1)) = \mathbb{P}(E_1) + \frac{1}{2} - \mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{2}$$

<u>Esercizio 7</u> Definiamo gli eventi $V_j = \{$all'estrazione $j-$esima è uscita verde$\}$ e $R_k = \{$all'estrazione $k-$esima è uscita rossa$\}$. Allora avremo che

$$\mathbb{P}(V_2) = \mathbb{P}(V_2|V_1)\,\mathbb{P}(V_1) + \mathbb{P}(V_2|R_1)\,\mathbb{P}(R_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8} + \frac{3}{7}\cdot\frac{5}{8} = \frac{51}{112} \cong 0,45$$

<u>Esercizio 8</u> Per prima cosa possiamo notare che in questo caso lo spazio campionario Ω è a priori infinito perchè la somma 5, così come la somma 7, potrebbe non essere mai uscita per ogni fissato $N \in \mathbb{N}$. Definiamo allora degli eventi che dipendono dal lancio che stiamo effettuando, cioè definiamo l'evento $E_j = \{$ Nei primi $j-1$ lanci non otteniamo nè 5 nè 7, al $j-$esimo 5 $\}$ per $j \geq 1$ (Nota: l'evento E_1 che in questa definizione sembra poco chiaro corrisponde semplicemente all'evento $E_1 = \{$Al primo lancio ottengo la somma 5 $\}$). Dunque l'evento $E = \{$Ottengo prima la somma 5 che la somma 7$\}$ sarà dato da

$$E = \bigcup_{j\geq 1} E_j$$

Inoltre poichè gli $\{E_j\}_{j\geq 1}$ formano una successione numerabile di eventi disgiunti avremo che

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{j\geq 1} \mathbb{P}(E_j)$$

Calcoliamo allora $\mathbb{P}(E_j)$. Poichè su ogni singolo lancio abbiamo che la probabilità che non escano nè la somma 5 nè quella 7 è 13/18 ed invece la probabilità che la somma sia 5 è 1/9 (Il calcolo di queste probabilità è un esercizio moooolto simile al 5^o del primo tutorato...) allora la probabilità di ogni E_j sarà

$$\mathbb{P}(E_j) = \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{13}{18}\right)^{j-1}$$

Dunque

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{j\geq 1} \mathbb{P}(E_j) = \frac{1}{9}\cdot\sum_{j\geq 1}\left(\frac{13}{18}\right)^{j-1} = \frac{1}{9}\sum_{j\geq 1}\left(\frac{13}{18}\right)^{j-1} \overset{j-1=n}{=}$$

$$= \frac{1}{9}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{13}{18}\right)^{n} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{13}{18}} = \frac{1}{9}\cdot\frac{18}{5} = \frac{2}{5}$$