

Corso di laurea in Matematica - Anno accademico 2007/2008

## CP1 - Calcolo delle probabilità

Docente: Fabio Martinelli

Tutori: Giovanna Catavittello e Daniele Piras

Tutorato 8 del 9 Maggio 2008

ESERCIZIO 1 Ad ogni lancio di un dado a sei facce non equilibrato otteniamo un numero dispari con probabilità  $C$  ed un numero pari con probabilità  $2C$ .

- i) Determinare  $C$
- ii) Supponiamo di lanciare il dado. Sia  $X = 1$  se il risultato è pari e 0 altrimenti. Inoltre, sia  $Y = 1$  se il risultato è maggiore di 3 e  $Y = 0$  altrimenti. Si determini la densità congiunta discreta di  $X$  e  $Y$ .
- iii) Si determini la probabilità che 4 degli esiti siano uno o due, 4 siano tre o quattro e 4 siano pari a cinque o sei.

ESERCIZIO 2 Siano  $\mathcal{U}_1$  e  $\mathcal{U}_2$  variabili casuali uniformemente distribuite in  $[0, 1]$  e siano

$$X = \min\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2\}$$

$$Y = \max\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2\}$$

Trovare

- i) Le densità  $f_X(x)$  e  $f_Y(y)$  delle variabili  $X$  e  $Y$ .
- ii) La densità e la media della variabile casuale

$$W = \frac{1}{X^2}$$

- iii) La densità congiunta  $f_{X,Y}(x, y)$ .
- iv)  $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2} | Y \geq \frac{1}{2})$

ESERCIZIO 3 (*Problema dell'ago di Buffon*) Disegniamo su un foglio due rette parallele e distanza  $D$ . Un ago di lunghezza pari ad  $L$ , dove  $L \leq D$ , viene lanciato sul foglio. Qual'è la probabilità che l'ago intersechi una retta?

ESERCIZIO 4 La densità congiunta di  $X$  e  $Y$  è

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} xy & 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- i)  $X$  e  $Y$  sono indipendenti?
- ii) Determinare la funzione di distribuzione congiunta.

- iii) Determinare  $\mathbb{E}(Y)$
- iv) Determinare  $\mathbb{P}(X + Y < 1)$

ESERCIZIO 5 La densità congiunta di  $X$  e  $Y$  è

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} C \cos(x) \cos(y) & 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- i) Determinare  $C$
- ii)  $X$  e  $Y$  sono indipendenti?
- iii) Calcolare  $\mathbb{E}(Y)$

ESERCIZIO 6 La densità congiunta di  $X$  e  $Y$  è

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} C \frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} & 0 < x < 1, 1 < y < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- i) Determinare  $C$
- ii)  $X$  e  $Y$  sono indipendenti?
- iii) Calcolare  $\mathbb{E}(X)$

ESERCIZIO 7 Siano  $X$  e  $Y$  variabili aleatorie indipendenti. Dimostrare che

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Mostrare con un controesempio che l'ipotesi di indipendenza di  $X$  e  $Y$  è necessaria.