Corso di laurea in Matematica - Anno accademico 2007/2008

CP1 - Calcolo delle probabilità

`Docente: Fabio Martinelli`

`Tutori: Giovanna Catavitello e Daniele Piras`

`Soluzioni Tutorato 5 del 22 Aprile 2008`

<u>Esercizio 1</u> Per determinare la costante C dobbiamo imporre che l'integrale della funzione sia 1.

i) $C = 5/2$ infatti

$$1 = \int_{\mathbb{R}} x(C - x^2)\,\chi_{\{x\in[0,2]\}}dx = \int_0^2 xC - x^3)dx = C\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\bigg|_0^2 = 2C - 4$$

ii) Dimostriamo per induzione che $C = 1/n!$.
Per $n = 1$ integrando per parti otteniamo

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx = -xe^{-x}\big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{R\to+\infty} -e^{-R} + 1 = 1$$

Ora mostriamo che $n \Rightarrow n+1$, cioè

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n! \Rightarrow \int_0^\infty x^{n+1}e^{-x}dx = (n+1)!$$

Infattti integrando ancora per parti otteniamo

$$\int_0^\infty x^{n+1}e^{-x}dx = -x^{n+1}e^{-x}\big|_0^{+\infty} + (n+1)\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$$

Che per ipotesi induttiva diventa

$$(n+1)\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = (n+1)n! = (n+1)!$$

Ovvero abbiamo dimostrato che $\forall\, n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!$$

Dunque $C = 1/n!$

iii) In questo caso $f_X(x)$ non può essere una densità di probabilità perchè cambia segno nell'intervallo di definizione.

<u>Esercizio 2</u> In questo caso dobbiamo procedere come per l'esercizio precedente, questa volta però dobbiamo impostare in sistema perchè le incognite sono due e per farlo utilizzeremo l'informazione aggiuntiva del valore dell'aspettazione.

i) Imponendo che $f_X(x)$ sia una densità otteniamo

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = \int_{-1}^{0} \alpha dx + \int_{0}^{1} \beta x dx = \alpha + \frac{\beta}{2}$$

Inoltre imponendo che la media sia nulla otteniamo

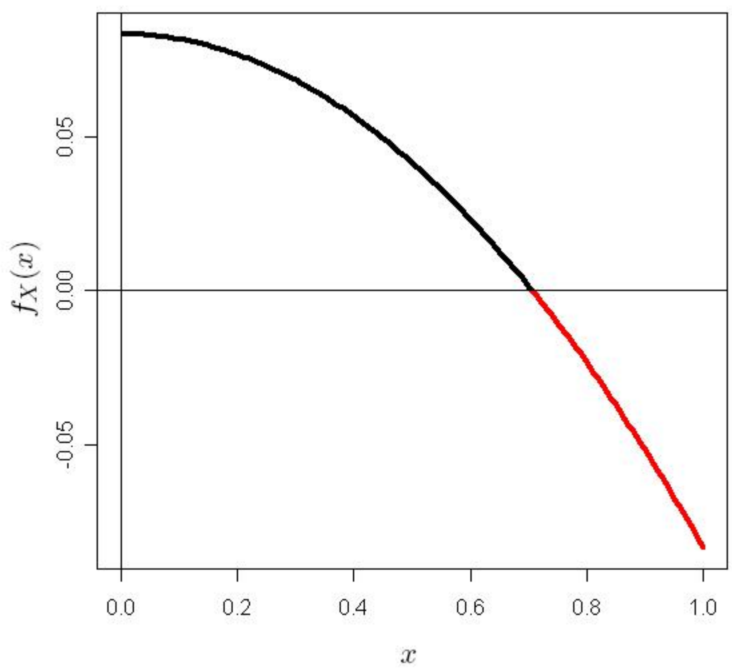
$$0 = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx = \int_{-1}^{0} x\alpha dx + \int_{0}^{1} \beta x^2 dx =$$

$$= \alpha \frac{x^2}{2}\bigg|_{-1}^{0} + \beta \frac{x^3}{3}\bigg|_{0}^{1} = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3}$$

Dunque otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \alpha + \frac{\beta}{2} = 1 \\ \frac{\beta}{3} - \frac{\alpha}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{6}{7} \\ \alpha = \frac{4}{7} \end{cases}$$

ii) Procedendo come sopra si ottiene $\alpha = 1/12$ e $\beta = -1/6$. Tuttavia per questi valori non abbiamo una densità di probabilità, in quanto la funzione cambia segno, come possiamo vedere dal grafico.



<u>ESERCIZIO 3</u> Affinchè le radici dell'equazione siano reali dobbiamo avere il discriminante non negativo, dunque

$$4Y^2 - 4(Y+2) \geq 0 \Leftrightarrow Y \leq -1\,,\ Y \geq 2$$

Dobbiamo quindi calcolare $\mathbb{P}\left(\{Y \leq -1\} \cup \{Y \geq 2\}\right) = \mathbb{P}\left(Y \leq -1\right) + \mathbb{P}\left(Y \geq 2\right)$ perchè gli eventi sono disgiunti. Ricordando che la distribuzione di $Y \sim U(0,5)$ è

$$f_Y(y) = \frac{1}{5}\chi_{\{x\in[0,5]\}}$$

Calcoliamo le probabilità, in particolare possiamo osservare che $\mathbb{P}\left(Y \leq -1\right) = 0$ perchè la variabile Y prende valori solamente nell'intervallo $[0,5]$, quindi calcoliamo solo $\mathbb{P}\left(Y \geq 2\right)$

$$\mathbb{P}\left(Y \geq 2\right) = \int_2^{+\infty} f_Y(y)dy = \int_2^5 \frac{1}{5}dy = \frac{3}{5}$$

Dunque le radici sarranno reali con probabilità 3/5

<u>ESERCIZIO 4</u> Sia A la variabile casuale che esprime il tempo d'attesa dello studente alla fermata dell'autobus. Si ha $A \sim U(0,30)$ in particolare si ha

$$f_A(x) = \frac{1}{30}\chi_{\{x\in[0,30]\}}$$

Dunque la probabilità che lo studente debba aspettare più di dieci minuti è $\mathbb{P}\left(A \geq 10\right)$, quindi

$$\mathbb{P}\left(A \geq 10\right) = \int_{10}^{+\infty} f_A(x)dx = \int_{10}^{30} \frac{dx}{30} = \frac{2}{3}$$

Inoltre se l'autobus non è ancora passato alle 8:15, la probabilità che lo studente debba aspettare altri 10 minuti è $\mathbb{P}\left(15 \leq A \leq 25\right)$, quindi

$$\mathbb{P}\left(15 \leq A \leq 25\right) = \int_{15}^{25} \frac{dx}{30} = \frac{1}{3}$$

<u>ESERCIZIO 5</u> La posizione della formica possiamo immaginarla come una variabile casuale uniformemente distribuita sulla superficie della stanza, cioè $X \sim U(0,94)$ (dove 94 è la superficie totale del parallelepipedo che rappresenta la stanza). A questo punto la probabilità che la formica sia sul soffito la possiamo interpretare come la probabilità che X valga al massimo 20, dove 20 è la superficie del soffito. Quindi la probabilità cercata è

$$\mathbb{P}\left(X \leq 20\right) = \int_{-\infty}^{20} \chi_{\{x\in[0,94]\}}\frac{dx}{94} = \int_0^{20} \frac{dx}{94} = \frac{10}{47}$$

Ora la probabilità che la formica sia sulle pareti è pari a $1-2\mathbb{P}\left(X \leq 20\right) = \frac{27}{47}$, in quanto la probabilità che la formica sia sul pavimento è la stessa che sia sul soffito, poi passando al complementare troviamo la probabilità carcata.
Per quanto riguarda la mosca, la sua posizione possiamo vederla come una variabile casuale uniforme tra 0 e 60, dove $60m^3$ è il volume della stanza. Quindi se la mosca deve stare ad almeno un metro da tutte le pareti vuol dire che la mosca dovrà volare all'interno di un solido di volume al più $3 \times (4-2) \times (5-2) = 18$. Dunque se Y è la v.c. che esprime la posizione della mosca si avrà $Y \sim U(0,60)$, e la probabilità cercata è $\mathbb{P}\left(Y \leq 18\right) = \frac{18}{30} = \frac{3}{10}$

<u>Esercizio 7</u> Se $Z \sim N(0,1)$ allora

$$\mathbb{P}\left(Z > z\right) = \int_z^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \overset{-t=x}{=} \int_{-z}^{-\infty} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{-z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \mathbb{P}\left(Z < -z\right)$$

Ricordando che $\varphi(x) = \mathbb{P}\left(Z < x\right)$ riscritta in questi termini l'uguaglianza appena dimostrata diventa

$$1 - \varphi(x) = \varphi(-x) \Leftrightarrow \varphi(x) = 1 - \varphi(-x)$$

Per quanto riguarda l'altra uguaglianza non dobbiamo nemmeno passare per gli integrali, infatti si ha

$$\mathbb{P}\left(|Z| > z\right) = \mathbb{P}\left(\{Z < -z\} \cup \{Z > z\}\right) = \mathbb{P}\left(Z < -z\right) + \mathbb{P}\left(Z > z\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(Z > z\right) + \mathbb{P}\left(Z > z\right) = 2\mathbb{P}\left(Z > z\right)$$

Dunque

$$\mathbb{P}\left(|Z| > z\right) = 2 - 2\varphi(z)$$

<u>Esercizio 8</u> Per svolgere correttamente questo esercizio è bene ricordare che in generale se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ allora se definiamo la v.c. Y come

$$Y := \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Allora $Y \sim N(0,1)$. Questo processo prende il nome di "standardizzazione" della v.c. X.
Per quanto detto definiamo allora

$$Z = \frac{D - 500}{8}$$

Si ha che Z è una normale standard. Quindi

i) $\mathbb{P}\left(480 \leq D \leq 490\right) = \mathbb{P}\left(\dfrac{480-500}{8} \leq \dfrac{D-500}{8} \leq \dfrac{490-500}{8}\right) =$
$= \mathbb{P}\left(-2,5 \leq Z \leq -1,25\right) = \varphi(-1,25) - \varphi(-2,5) =$
$1 - \varphi(1,25) - (1 - \varphi(2,5)) = \varphi(2,5) - \varphi(1,25)$
$\simeq 0,9938 - 0,8944 = 0,0994 \simeq 0,1$

ii) $\mathbb{P}\left(|D-500| \geq 20\right) = \mathbb{P}\left(\dfrac{|D-500|}{8} \geq \dfrac{20}{8}\right) =$
$\mathbb{P}\left(|Z| > 2,5\right) = 2 - 2\varphi(2,5) = 2 - 2 \times (0,9938) \simeq 2 - 1,9876 = 0,0124$

<u>Esercizio 9</u> *i)* $\mathbb{P}\left((X,Y) \in A\right) = \mathbb{P}\left(\{|X| < 1\} \cap \{|Y| < 2\}\right) =$
$= \mathbb{P}\left(\{|X| < 1\} \cap \{\frac{|Y|}{\sqrt{2}} < \sqrt{2}\}\right) = [2\varphi(1) - 1] \cdot [2\varphi(1,41) - 1] =$
$= [2(0,8413) - 1] \cdot [2(0,9207) - 1] = (0,6826) \cdot (0,8414) \simeq 0,57$

ii) $\mathbb{P}\left((X,Y) \in B\right) = \mathbb{P}\left(\{0 < X < 2\} \cap \{0 < Y < 4\}\right) = \mathbb{P}\left(0 < X < 2\right) \cdot$
$\mathbb{P}\left(0 < \frac{Y}{\sqrt{2}} < \frac{4}{\sqrt{2}}\right)$
$[\varphi(2) - \varphi(0)] \cdot [\varphi(2,82) - \varphi(0)] = (0,9772 - 0,5) \cdot (0,9976 - 0,5) =$
$(0,4772) \cdot (0,4976) \simeq 0,24$