Corso di laurea in Matematica - Anno accademico 2007/2008

CP1 - Calcolo delle probabilità

`Docente: Fabio Martinelli`

`Tutori: Giovanna Catavitello e Daniele Piras`

`Tutorato 4 del 19 Marzo 2008`

<u>Esercizio 1</u> Dimostrare che se X è una variabile casuale con media $\mathbb{E}(X) = \mu$ allora

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2$$

<u>Esercizio 2</u> Delle seguenti variabili aleatorie determinare distribuzione, media e varianza

i) Si lanciano due dadi equi ciascuno dei quali ha due facce 1, due facce 2 e due facce 3. $X =$ "somma dei punteggi ottenuti"

ii) Si lanciano due dadi equi a sei facce. Detti x_1 e x_2 i risulati dei due lanci $X = |x_1 - x_2|$ e $Y = \min\{x_1, x_2\}$

iii) Si lanciano tre monete. $X =$"numero di teste $-$ numero di croci".

<u>Esercizio 3</u> Nel gioco della briscola si attribuisce il valore 11 agli assi, 10 ai tre, valore 4, 3, 2 a re, cavalli e fanti rispettivamente. Calcolare valore medio e varianza della variabile casuale $X =$ "valore di una carta estratta dal mazzo".

<u>Esercizio 4</u> Data una moneta truccata tale che la probabilità che si presenti testa sia 0.7 si supponga di effettuare 5 lanci, determinare la probabilità dei seguenti eventi:

i) Si ottengono esattamente 2 teste

ii) Si ottiene almeno una testa

ii) Si ottengono minimo 3 teste

Determinare inoltre il numero atteso di teste.
Sia X la variabile casuale che conta il numero di teste nei 5 lanci,
X ha distribuzione nota?

<u>Esercizio 5</u> Siano $X_1, ..., X_{100}$ variabili aleatorie tutte con la seguente distribuzione di probabilità

$$\mathbb{P}(X_j = 0) = 0,45 - p \quad \mathbb{P}(X_j = 1) = 0,25$$

$$\mathbb{P}(X_j = 2) = 0,3 \quad \mathbb{P}(X_j = 3) = p$$

Sia $Y = \sum_{j=1}^{100} X_j$. Trovare p tale che $\mathbb{E}(Y) = 100$. Per tale valore di p si ha inoltre che $\text{Var}(Y) = 90$, dare una stima per $\mathbb{P}(Y \geq 115)$ e per $\mathbb{P}(86 \leq Y \leq 114)$.

ESERCIZIO 6 Un'urna contiene 112 dadi a sei facce di cui 56 equi e 56 truccati. Nei dadi truccati la faccia 1 esce con probabilità 1/2 e le altre facce con probabilità 1/10. Si estrae a caso un dado, se X è la variabile aleatoria che indica il risultato del lancio, calcolare la sua media e la probabilità che $X = 3$. Se il dado estratto viene lanciato due volte e indico con X_i il risultato del lancio $i-$esimo lancio $i \in \{1, 2\}$ calcolare la probabilità che il dado sia truccato sapendo che $X_1 = 2$ e $X_2 = 3$.

ESERCIZIO 7 Si consideri la seguente equazione

$$x^2 - 2x + A = 0$$

Dove A è una variabile aleatoria con distribuzione

$$\mathbb{P}(A = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}(A = \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \quad \mathbb{P}(A = \frac{1}{6}) = \frac{1}{6}$$

Per ogni valore di A l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte. Siano X_1 e X_2 con $X_1 < X_2$. Dopo aver espresso X_1 e X_2 in funzione di A, calcolare

i) $\mathbb{E}(X_2 - X_1)$

ii) $\mathrm{Var}(X_2 - X_1)$

ESERCIZIO 8 Un calcolatore è collegato ad una rete che permette l'accesso ad un massimo di 20 persone. Collegati a questa rete vi sono i terminali di 24 operatori, ognuno dei quali, ad un dato istante, richiede con probabilità $p = 0,6$ di essere connesso al calcolatore centrale. Qual è la probabilità che ad un dato istante la rete sia satura (cioè tutti e 20 gli accessi siano utilizzati)?

ESERCIZIO 9 Sia $X_p \sim Bin(n, p)$ dimostrare che, posto $q = 1 - p$ si ha

$$\mathbb{P}(X_p \leq i) = 1 - \mathbb{P}(X_q \leq n - i - 1)$$

(Suggerimento: Avere un numero di successi minore o uguale ad i è equivalente a quanto richiesto per gli insuccessi?)