

II Esonero

Cognome	
Nome	
Matricola	

Esercizio 1. Una popolazione è distribuita secondo la normale $\mathcal{N}(170, 64)$.

- Calcolare il percentile 95% della popolazione¹. [**2 punti**].
Risp: $170 + 8 \times 1.64 \approx 183,3$
- Sia \bar{X}_4 la media campionaria di un campione di numerosità 4. Qual'è la funzione generatrice di \bar{X}_4 ? [**3 punti**]
Risp: $M(t) = \exp(170t + \frac{1}{2}16t^2)$.
- Trovare n tale che il 95% delle volte la media campionaria \bar{X}_n di un campione di taglia n soddisfa $\bar{X}_n \leq 172$? [**2 punti**]
Risp: $n \geq 16 \times (1,64)^2 = 43,03$.

¹ $z_{5\%} \approx 1,64$ e $z_{2,5\%} \approx 1,96$.

Nome: _____

Esercizio 2.

1. La funzione generatrice $M(t)$ della distribuzione $\text{Gamma}(n, \lambda)$ è data dall'espressione $M(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$, $t < \lambda$. Dedurre che la somma di n variabili $\text{Exp}(\lambda)$ indipendenti è distribuita come la $\text{Gamma}(n, \lambda)$. [**3 punti**]
2. Sia $X \sim \text{Gamma}(100, 1)$. Calcolare approssimativamente $\mathbb{P}(X \geq 116, 4)$. [**3 punti**]

Risp:

$$\mathbb{P}(X \geq 116, 4) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 100}{10} \geq 1, 64\right) = 0.05$$

Nome: _____

Esercizio 3.

- Due campioni presi da due popolazione normali differenti $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2), \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$ hanno fornito rispettivamente i seguenti valori: (3, 4, 5, 8) e (1, 2, 3, 3, 6). Trovare un intervallo di confidenza al 95% per la differenza $\mu_1 - \mu_2$ supponendo nota σ^2 . [**4 punti**]

Risp: $2 \pm 1,96\sigma\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}} = 2 \pm 1,314\sigma$

- L'intervallo di confidenza al 95% per la media di una popolazione normale ottenuto da un campione (X_1, \dots, X_n) sapendo la deviazione standard σ è sempre più piccolo dell'intervallo di confidenza ottenuto dallo stesso campione senza conoscere σ . Vero o falso ? Giustificare [**3 punti**]

Risp: Falso

Nome: _____

Esercizio 4.

- (a) Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza per il parametro λ di una Poisson $Po(\lambda)$.

[**3 punti**]

Risp: \bar{X}

- (b) Quanto vale l'errore quadratico medio dello stimatore trovato ? [**3 punti**]

Rips: λ/n

Nome: _____

Esercizio 5. Per testare l'ipotesi $\mathbb{P}(\text{testa}) \leq 1/2$ una moneta viene lanciata 6 volte ottenendo 5 teste.

- L'ipotesi viene rifiutata ? Quanto vale il *p-dei-dati* ? NO, $\sim 10\%$
punti3
- È corretto pensare il *p-dei-dati* come la probabilità che l'ipotesi che $\mathbb{P}(\text{testa}) \leq 1/2$ sia vera ? Giustificare. [**2 punti**]
Risp: NO
- Calcolare la probabilità di commettere un errore di seconda specie supponendo $\mathbb{P}(\text{testa}) = 2/3$. [**2 punti**]
Risp: $\mathbb{P}_{p=2/3}(6 \text{ teste}) = 0.087$.