

### I Esonero

Cognome	
Nome	
Matricola	

**Esercizio 1.** Un campione di dati ha fornito i seguenti valori  $\{1, 2, 3\}$  con frequenze  $\{10, 5, 8\}$  rispettivamente. Calcolare media, mediana e moda campionaria. [ **3 punti** ]

**Soluzione** media =  $44/23$ , mediana = 2, moda = 1.

Nome: \_\_\_\_\_

**Esercizio 2.**

1. Un gruppo di  $2n$  persone composto da  $n$  donne e  $n$  uomini viene messo in fila in modo casuale. Calcolare la probabilità che la fila sia del tipo donna-uomo-donna-.... [ **2 punti** ]
2.  $n$  palline numerate vengono distribuite a caso tra  $n$  urne numerate, in modo che ogni urna contenga esattamente una pallina.
  - (a) Quanti elementi contiene lo spazio campionario ? [ **1 punto** ]
  - (b) Sapendo che la prima pallina non e' finita nella prima urna, quanto vale la probabilità che la seconda pallina sia nella seconda urna ? [ **3 punti** ]

**Soluzione**

1.  $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$
2. (a)  $n!$   
(b)

$$\frac{P(2 \mapsto 2) - P(2 \mapsto 2; 1 \mapsto 1)}{1 - P(1 \mapsto 1)} = \frac{n-2}{(n-1)^2}.$$

Nome: \_\_\_\_\_

**Esercizio 3.** Si lanciano due dadi e siano  $X, Y$  il più piccolo e il più grande tra i numeri ottenuti.

1. Calcolare la media e la varianza di  $X + Y$ . [ **3 punti** ]
2. Calcolare la covarianza tra  $X$  e  $Y$ . [ **3 punti** ]

**Soluzione**

1.  $\mathbb{E}(X + Y) = 3.5 \times 2 = 7$ .  $\text{Var}(X + Y) = 2 \times 35/12$ .
2.  $\mathbb{E}(X) = 3.5 - \sum_{i=2}^6 \sum_{j=1}^{i-1} (i - j)/36 = 3.5 - 35/36$ ,  $\mathbb{E}(Y) = 3.5 + 35/36$ ,  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = (35/36)^2$ .

Nome: \_\_\_\_\_

**Esercizio 4.** Due variabili casuali continue  $X, Y$  hanno densità congiunta data da

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 \exp(-x - 2y) & \text{se } 0 < x, y < +\infty \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Le variabili sono indipendenti ? [ **2 punti** ]
2. Calcolare la funzione generatrice dei momenti di  $X$  e tramite questa la media di  $X$ . [ **3 punti** ]
3. Calcolare  $\mathbb{P}(Y > X/2)$ . [ **3 punti** ]

**Soluzione**

1. Sì
2.  $1/(1-t)$  se  $t < 1$ .  $\mathbb{E}(X) = 1$ .
- 3.

$$\mathbb{P}(Y \geq X/2) = \int_0^\infty dy \, 2e^{-2y} \int_0^{2y} dx \, e^{-x} = \int_0^\infty dy \, 2e^{-2y}(1 - e^{-2y}) = 1 - 1/2 = 1/2.$$

Nome: \_\_\_\_\_

**Esercizio 5.**

1. Enunciare e dimostrare la legge debole dei grandi numeri. [ **3 punti** ]
2. Enunciare e dimostrare l'approssimazione di Poisson della distribuzione Binomiale  $B(n, p)$ . Chiarire bene in quale regime si applica. [ **3 punti** ]
3. L'altezza  $H$  (in cm) di una popolazione e' supposta essere una variabile casuale normale  $N(170, 36)$ . L'ipotesi può essere considerata matematicamente corretta ? E nella pratica ? Quanto vale l'altezza del 5% piu' basso della popolazione ? [ **4 punti** ]

**Soluzione**

$$\mathbb{P}(H \leq H^*) = 0.05 \Rightarrow \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{H^* - 170}{6}\right) = 0.05$$

ossia  $H^* = 170 - 6z_{0.05}$ .