Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

SOLUZIONI DEL TUTORATO NUMERO 1 (2 MARZO 2011)
RIPASSO

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{2}dx = \left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

(b)
$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\cos^2(x)dx = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(2x)}{4}dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(4x)}{8} = \left[\frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}$$

(c)
$$\int_\pi^{2\pi} \frac{dx}{1-\sin(x)} \overset{\left(t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{=} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int_{-\infty}^0 \frac{2}{(t-1)^2}dt = \left[\frac{2}{1-t}\right]_{-\infty}^0 = 2$$

(d)
$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{dx}{\sin(x)} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{\sin(x)}{1-\cos^2(x)}dx \overset{(y=\sin(x))}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{1-y^2} = \frac{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{1-y}}{2} + \frac{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{y+1}}{2} =$$
$$= \frac{[-\log|1-y|]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{[\log|y+1|]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\log\left(\frac{3}{2}\right)-\log\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{\log\left(\frac{3}{2}\right)-\log\left(\frac{1}{2}\right)}{2} =$$
$$= \log(3) - \log(2) - (\log(1) - \log(2)) = \log(3)$$

(e)
$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}dx = \int_0^{+\infty}\left(-\frac{x^2}{2}\right)\left(-2xe^{-x^2}\right)dx = \left[-\frac{x^2e^{-x^2}}{2}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -xe^{-x^2} =$$
$$= \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} = \left[\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

(f)
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)dx = \left[e^{-x}\sin(x)\right]_0^{\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-x}\sin(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(x) =$$
$$\left[-e^{-x}\cos(x)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\left(-e^{-x}\right)\cos(x)dx = 1 - \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)dx \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)dx = \frac{1}{2}$$

(g)

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3 - x} = \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{\log|x+1|}{2} + \frac{\log|x-1|}{2} - \log|x| \right]_2^{+\infty} =$$

$$\left[\log\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} \right) \right]_2^{+\infty} = \log\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$$

(h)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + 4e^{-x} - 2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} - 2e^x + 4} \overset{(y=e^x)}{=} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^2 - 2y + 4} =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(y-1) \right)^2 + 1} dy = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(y-1) \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

2. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

(a) $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} \le 1 \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x, y \le 1 \right\}$
è il cubo centrato nell'origine di lato 2:

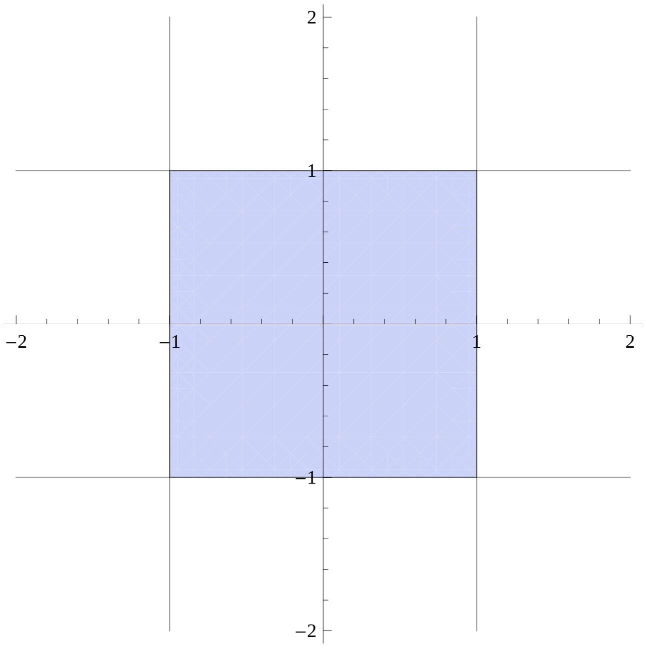

Figure 1: $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} \le 1 \right\}$

(b) $B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le x \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 \le 1 \right\}$
è la circonferenza centrata in $\left(\frac{1}{2}, 0 \right)$ di raggio $\frac{1}{2}$:

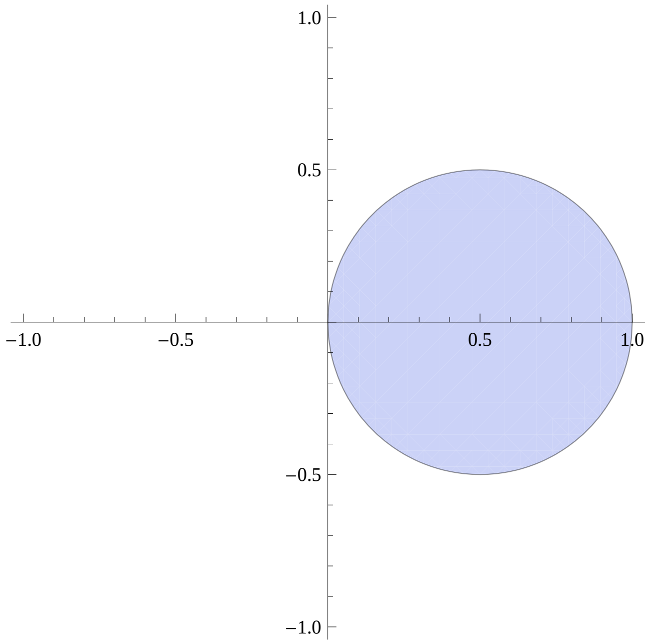

Figure 2: $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x\right\}$

(c) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 \leq \dfrac{y^2}{3}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \left(y + \sqrt{3}x\right)\left(y - \sqrt{3}x\right) \geq \right.$ $\left. \geq 0\right\}$ è la porzione della circonferenza unitaria delimitata dalle rette di equazione $y = \sqrt{3}x$ e $y = -\sqrt{3}x$:

(d) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, |y| \leq 4 - x^2\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, x^2 - 4 \leq y \leq 4 - x^2\right\}$ è la regione di piano delimitata dalle rette verticali $x = 1$ e $x = -1$ e dalle parabole $y = x^2 - 4$ e $y = 4 - x^2$:

3. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

(a) $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ è la regione di spazio delimitata dalla sfera centrata nell'origine di raggio 2 e il cilindro di raggio 1 avente come asse l'asse z:

(b) $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}\right\}$ è la regione di piano compresa tra il piano xy e il grafico della funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}$:

(c) $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, |z| \leq 1\right\}$ è la porzione del cono avente vertice nell'origine, asse verticale e angolo d'apertura $\dfrac{\pi}{4}$ delimitata dai piani orizzontali $z = 1$ e $z = -1$:

(d) $H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| \leq 1\right\}$ è l'ottaedro ottenuto attraverso simmetrie rispetto a uno o più assi cartesiani a partire dalla regione del primo quadrante delimitata dal piano $x + y + z = 1$:

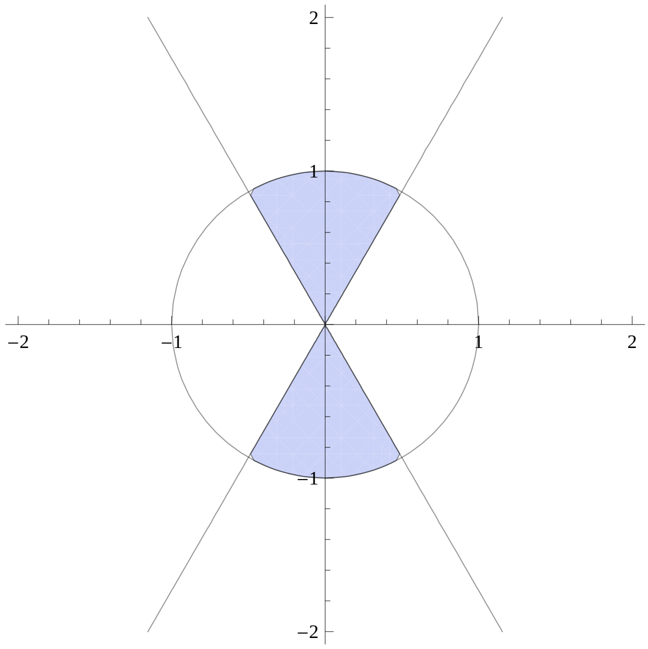

Figure 3: $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 \leq \dfrac{y^2}{3}\right\}$

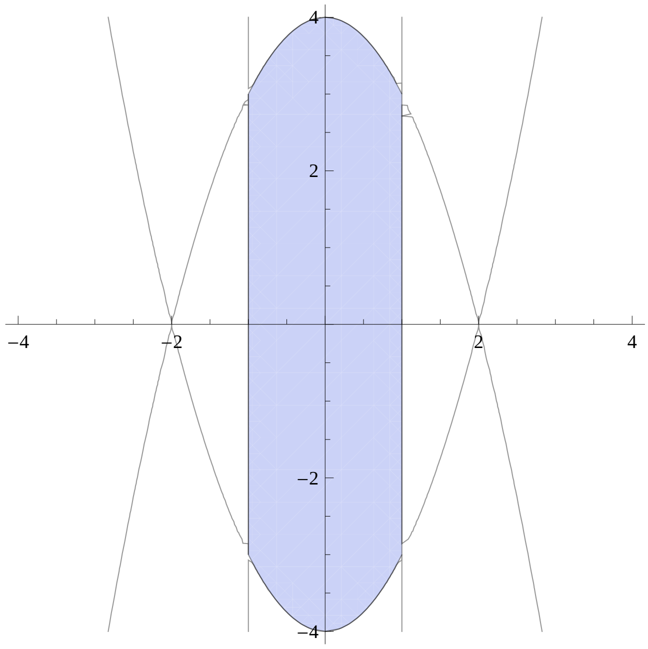

Figure 4: $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, |y| \leq 4 - x^2\right\}$

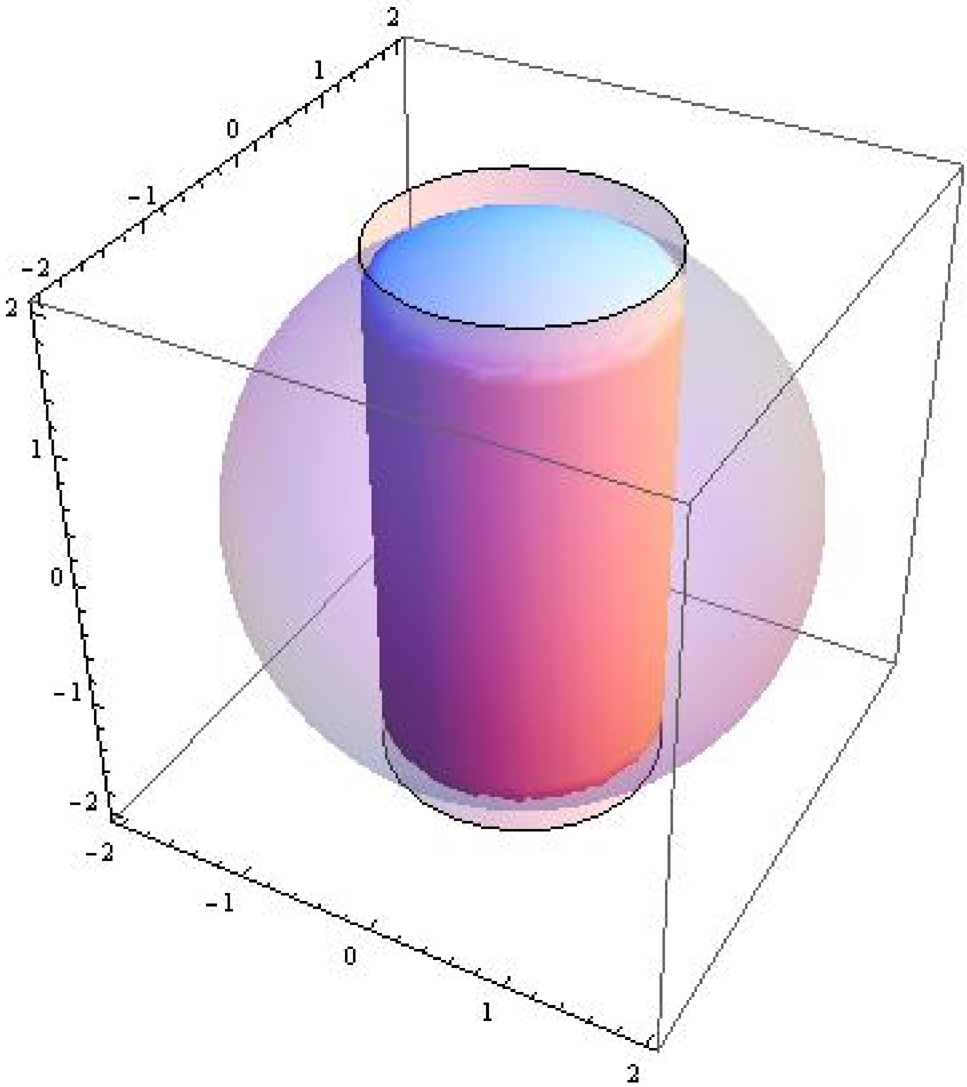

Figure 5: $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$

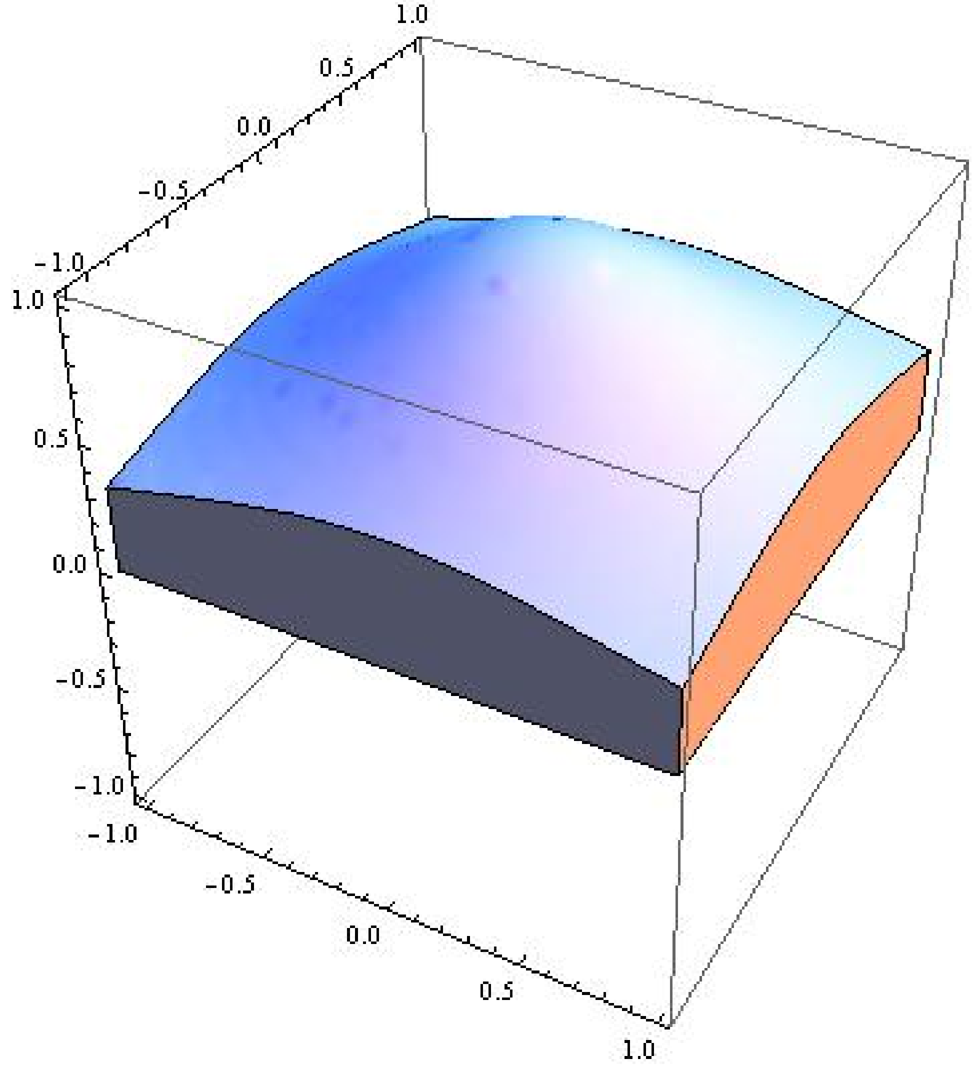

Figure 6: $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1} \right\}$

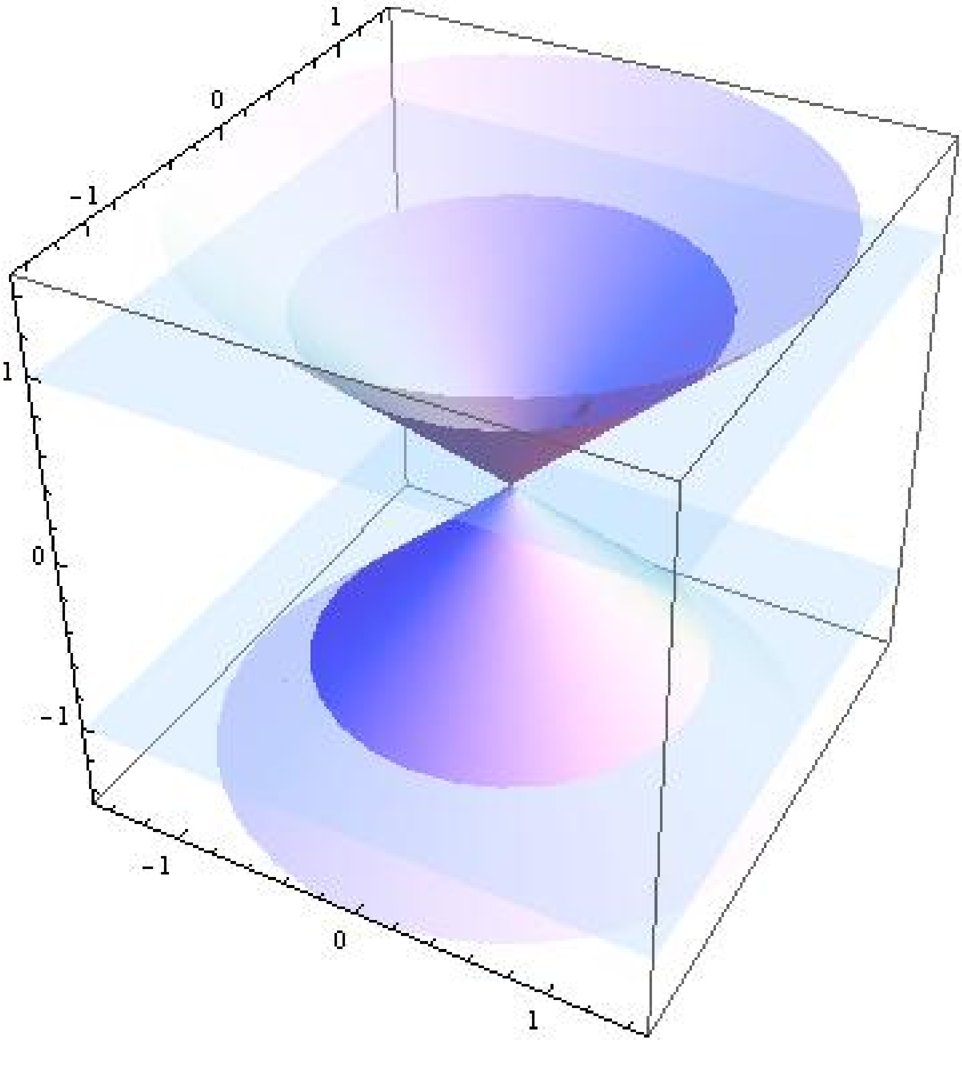

Figure 7: $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, |z| \leq 1\right\}$

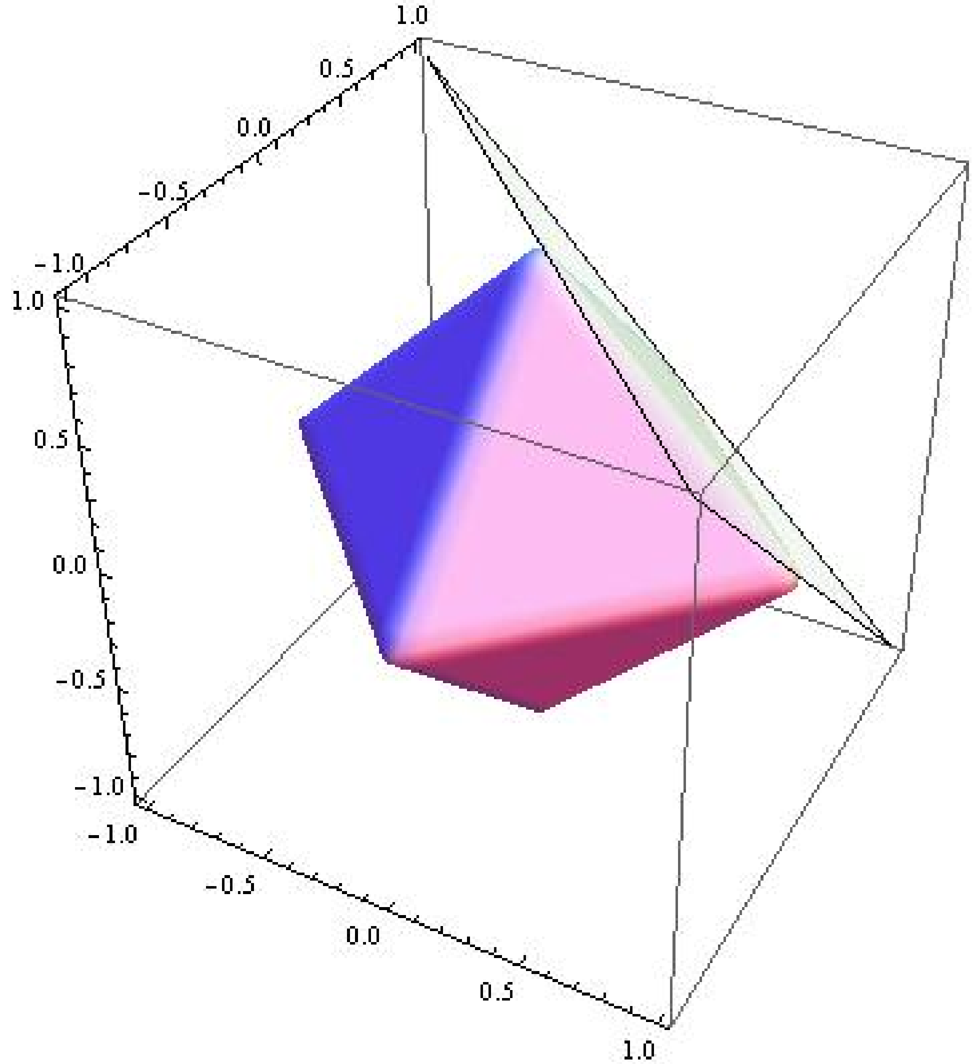

Figure 8: $H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| \leq 1\right\}$