Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 11 (25 Maggio 2011)

1-forme differenziali

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1.

$$\gamma(t) = \left(\sin t, \cos^2 t, \cos t\right) \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \omega = xydx + (x+y)dy - zdz$$

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle \omega(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\langle \left(\sin t \cos^2 t, \sin t + \cos^2 t, -\cos t\right), (\cos t, -2\sin t\cos t, -\sin t) \right\rangle dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\sin^2 t\cos t - \sin t\cos^3 t + \sin t\cos t dt = \left[-\frac{2}{3}\sin^3 t + \frac{\cos^4 t}{4} + \frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{5}{12}$$

2.

$$\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t) \quad t \in [0, \pi] \qquad \omega = dx + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) dy$$

$$\int_\gamma \omega = \int_0^\pi \langle \omega(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle dt = \int_0^\pi \left\langle \left(1, \frac{\pi}{2} - t\right), (-2\sin t, 3\cos t) \right\rangle dt =$$

$$= -2\int_0^\pi \sin t dt + 3\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\cos t dt = 2[\cos t]_0^\pi + 3\left(\left[\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\sin t\right]_0^\pi + \int_0^\pi \sin t dt\right) =$$

$$= -4 + 3[-\cos t]_0^\pi = 2$$

3.

$$\gamma(t) = \left(e^{\sin(\pi t)}, e^{-\cos(\pi t)}, e^{2t-1}\right) \quad t \in [0,1]$$

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2+z^2+1}dx + \frac{y}{x^2+y^2+z^2+1}dy + \frac{z}{x^2+y^2+z^2+1}dz$$

(a) ω è chiusa perché

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{x^2+y^2+z^2+1} = -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{x^2+y^2+z^2+1}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{x^2+y^2+z^2+1} = -\frac{2yz}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{x^2+y^2+z^2+1}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{x^2+y^2+z^2+1} = -\frac{2xz}{\left(x^2+y^2+z^2+1\right)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2+z^2+1}$$

(b) ω è una forma esatta perché è chiusa e il suo insieme di definizione, cioè $\mathbb{R}^3$, è stellato.
Un potenziale $f(x,y,z)$ per ω è tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x}(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2+1} \\ \frac{\partial V}{\partial y}(x,y,z) = \frac{y}{x^2+y^2+z^2+1} \\ \frac{\partial V}{\partial z}(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2+z^2+1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x,y,z) = \int_0^x \frac{t}{t^2+y^2+z^2+1} + a(y,z) = \frac{\log(x^2+y^2+z^2)}{2} + a(y,z) \\ f(x,y,z) = \int_0^y \frac{x}{x^2+t^2+z^2+1} + b(x,z) = \frac{\log(x^2+y^2+z^2)}{2} + b(x,z) \\ f(x,y,z) = \int_0^z \frac{x}{x^2+y^2+t^2+1} + c(x,y) = \frac{\log(x^2+y^2+z^2)}{2} + c(x,y) \end{cases}$$

Affinché sia $a(y,z) = b(x,z) = c(x,y)$, dalla prima uguaglianza si ricava $a(y,z) = b(x,z) = f(z)$, dunque $f(z) = c(x,y) \equiv c$, pertanto affinché si abbia $f(0,0,0) = 0$, dev'essere $c = 0$ e pertanto

$$f(x,y,z) = \frac{\log\left(x^2+y^2+z^2\right)}{2}$$

(c) Essendo V un potenziale per ω, allora

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \log\left(2e^2+2\right) - \log\left(2e^{-2}+2\right) = 2$$

4.

$$\gamma(t) = \left(\sqrt[3]{\cos t}, \sin t\right) \quad t \in [-\pi, \pi] \qquad \omega = -\frac{3x^2y}{x^6+y^2}dx + \frac{x^3}{x^6+y^2}dy$$

(a) ω è una forma chiusa perché

$$\frac{\partial}{\partial y} - \frac{3x^2y}{x^6+y^2} = \frac{3x^2\left(y^2-x^6\right)}{\left(x^6+y^2\right)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^3}{x^6+y^2}$$

(b)

$$\int_\gamma \omega = \int_{-\pi}^{\pi} \langle \omega(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left\langle \left(-3\cos^{\frac{2}{3}} t \sin t, \cos t\right), \left(-\frac{\sin t}{3\cos^{\frac{2}{3}} t}, \cos t\right) \right\rangle dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = 2\pi$$

(c) ω non è una forma esatta perché, se lo fosse, allora il suo integrale lungo qualsiasi curva chiusa sarebbe nullo ma, come è stato appena visto, γ è chiusa e $\int_\gamma \omega \neq 0$

5.

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [-\pi, \pi] \qquad \omega = \cos(x)e^{\arctan y}dx + \left(\frac{\sin(x)e^{\arctan y}}{y^2+1} + x\right)dy$$

Posta $f(x,y) = \sin(x)e^{\arctan y}$, si ha $\omega = df + xdy$, dunque essendo γ chiusa,

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega = \int_{-\pi}^{\pi} \langle (0, \cos t), (-\sin t, \cos t) \rangle dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2} =$$

$$= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

6.

$$\gamma(t) = \left(t, \log((e-1)t+1), \frac{4}{\pi} \arctan t \right) \quad t \in [0,1]$$

$$\omega = \left(4xz - 3y^2\right) dx + \left(z^2 - 6xy\right) dy + \left(2yz + 2x^2\right) dz$$

Posta $f(x,y,z) = 2x^2z - 3xy^2 + yz^2$, si ha $\omega = df$, dunque

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = 0$$