Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 2 (9 Marzo 2011)
Spazi normati

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. $f_n(x) = xe^{-nx} \in C([0,1])$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 xe^{-nx}dx = \left[x\frac{-e^{-nx}}{n}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-e^{-nx}}{n}dx = -\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n}\int_0^1 e^{-nx}dx =$$

$$= -\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n}\left[\frac{-e^{-nx}}{n}\right]_0^1 = -\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1-e^{-n}}{n^2} = \frac{1-(n+1)e^{-n}}{n^2}$$

Dunque, $\|f_n - 0\|_1 = \|f_n\|_1 \overset{n\to+\infty}{\to} 0$, cioè $f \overset{n\to+\infty}{\to} 0$ rispetto a $\|\cdot\|_1$.

2. $f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}}\sin x \overset{n\to+\infty}{\to} f(x) := \sin x \; \forall x \in [0,\pi]$ (Convergenza puntuale).
La convergenza é anche rispetto a $\|\cdot\|_1$ perché

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^\pi \left|1 - e^{-\frac{x^2}{n}}\right| |\sin x|dx \le \left(1 - e^{-\frac{\pi^2}{n}}\right)\int_0^\pi |\sin x|dx \le \pi\left(1 - e^{-\frac{\pi^2}{n}}\right) \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

3. $x_n(k) = \dfrac{n}{n(k^2+1)+1} \overset{n\to+\infty}{\to} x(k) = \dfrac{1}{k^2+1} \; \forall k \in \mathbb{N}$.
La convergenza è anche in ℓ_1 perché

$$\|x_n - x\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty}\left|\frac{n}{n(k^2+1)+1} - \frac{1}{k^2+1}\right| = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(n(k^2+1)+1)(k^2+1)} \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k^2+1)^2} \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

4. $x_n(k) = \dfrac{1}{n^3}\cos^k\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

$$\|x_n\|_1 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{+\infty}\cos^k\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^3\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$$

$$\|x_n\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\cos^k\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2} = \frac{1}{n^3}\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\cos^2\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^k} = \frac{1}{n^3\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{1}{n^2}\right)}}$$

Dunque,

$$\lim_{n\to+\infty}\|x_n\|_1 = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \lim_{n\to+\infty} n\frac{\frac{1}{n^4}}{1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)} \overset{(t=\frac{1}{n^2})}{=} \lim_{t\to0}\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{t^2}{1-\cos t} = +\infty$$

e quindi x_n non converge in ℓ_1, mentre

$$\lim_{n\to+\infty}\|x_n\|_2=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{1}{n^2}\right)}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{1+\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}}\sqrt{\frac{\frac{1}{n^4}}{1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}}\overset{\left(t=\frac{1}{n^2}\right)}{=}$$

$$=\lim_{t\to0}\sqrt{\frac{t}{1+\cos t}}\sqrt{\frac{t^2}{1-\cos t}}=0$$

pertanto $x_n\overset{n\to+\infty}{\to}0$ in ℓ_2.

5. (a)

$$\|f\|_1=\int_a^b|f(x)|dx\le\int_a^b\|f\|_\infty dx=(b-a)\|f\|_\infty\quad\forall f\in C([a,b])$$

(b) $f_n(x)=(1-nx)\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$

$$\|f_n\|_\infty=f_n(0)=1$$

mentre

$$\|f_n\|_1=\int_0^{\frac{1}{n}}(1-nx)dx=\left[x-\frac{n}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2n}$$

Da ciò si deduce che le due norme non possono essere equivalenti: infatti, se esistesse C' tale che

$$C'\|f\|_\infty\le\|f\|_1\ \forall f\in C([0,1])$$

allora in particolare si avrebbe

$$C'\|f_n\|_\infty\le\|f_n\|_1\overset{n\to+\infty}{\to}0$$

e dunque $\|f_n\|_\infty\overset{n\to+\infty}{\to}0$, che è assurdo.

(c) $g_n(x)=\frac{1}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)\mathbf{1}_{[0,n]}(x)$

$$\|g_n\|_\infty\le\frac{1}{n}\overset{n\to+\infty}{\to}0$$

mentre

$$\|g_n\|_1=\int_0^n\frac{1}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)dx=\frac{1}{n}\left[n-\frac{x^2}{2n}\right]_0^n=\frac{1}{2}$$

dunque, analogamente a prima, se continuasse a valere la disuguaglianza precedente, si avrebbe

$$\|g_n\|_1\le C\|g_n\|_\infty\overset{n\to+\infty}{\to}0$$

che è assurdo.

6.

$$\|x\|_\infty^2=x_k^2\text{ per qualche }k\in\{1,\dots,n\}\le x_1^2+\cdots+x_n^2=\|x\|_2^2\Rightarrow\|x\|_\infty\le\|x\|_2$$

mentre

$$\|x\|_2^2=x_1^2+\cdots+x_n^2\le\|x\|_\infty^2+\cdots+\|x\|_\infty^2=n\|x\|_\infty^2\Rightarrow\|x\|_2\le\sqrt{n}\|x\|_\infty$$

Le costanti $A = 1$ e $B = \sqrt{n}$ sono ottimali perché

$$x = (1, 0, \dots, 0) \Rightarrow \|x\|_\infty = \|x\|_2$$

e

$$x = (1, 1, \dots, 1) \Rightarrow \|x\|_2 = \sqrt{n} = \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

dunque, se $A' > 1$, il vettore $x = (1, 0, \dots, 0)$ non soddisferebbe

$$A'\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$$

mentre, se $B' < \sqrt{n}$, per $x = (1, 1, \dots, 1)$ non varrebbe la condizione

$$\|x\|_2 \leq B'\|x\|_\infty$$

7. (a)

$$\|f\|_{C^m([-1,1])} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \dots + \left\|f^{(m)}\right\|_\infty$$

$\|f\|_{C^m([-1,1])} \geq 0$ perché $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x \in [-1,1]} |f(x)| \geq 0$ e $\left\|f^{(j)}\right\|_\infty := \sup\limits_{x \in [-1,1]} \left|f^{(j)}(x)\right| \geq 0 \; \forall j \in \{1, \dots, m\}$

$$\|f\|_{C^m([-1,1])} = 0 \Rightarrow 0 = \|f\|_\infty := \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)| \Rightarrow f(x) \equiv 0 \; \forall x \in [-1, 1]$$

$$\|\lambda f\|_{C^m([-1,1])} = \|\lambda f\|_\infty + \|\lambda f'\|_\infty + \dots + \left\|\lambda f^{(m)}\right\|_\infty = \lambda\|f\|_\infty + \lambda\|f'\|_\infty + \dots + \lambda\left\|f^{(m)}\right\|_\infty = \lambda\|f\|_{C^m([-1,1])}$$

$$\|f+g\|_{C^m([-1,1])} := \|f+g\|_\infty + \|f'+g'\|_\infty + \dots + \left\|f^{(k)} + g^{(k)}\right\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty + \dots +$$
$$+ \left\|f^{(m)}\right\|_\infty + \left\|g^{(m)}\right\|_\infty = \|f\|_{C^m([-1,1])} + \|g\|_{C^m([-1,1])}$$

Dunque, $\|f\|_{C^m([-1,1])}$ è una norma su $C^k([-1, 1]) \; \forall m \leq k$.

(b) Mostro che $\left(C^1([-1, 1]), \|\cdot\|_{C^1([-1,1])}\right)$ è completo: se $f_n \in C^1([-1, 1])$ è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_{C^1([-1,1])}$, allora

$$\|f_n - f_m\|_\infty \overset{n,m \to +\infty}{\to} 0 \quad \text{e} \quad \|f_n' - f_m'\|_\infty \overset{n,m \to +\infty}{\to} 0$$

dunque f_n e f_n' sono due successioni in $C([-1, 1])$ di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_\infty$ e quindi, essendo quest'ultimo spazio completo,

$$f_n \overset{n \to +\infty}{\to} f \quad \text{e} \quad f_n' \overset{n \to +\infty}{\to} g \quad \text{rispetto a} \quad \|\cdot\|_\infty$$

inoltre

$$f(x) \overset{n \to +\infty}{\leftarrow} f_n(x) = f(0) + \int_0^x f_n'(t)dt \overset{n \to +\infty}{\to} f(0) + \int_0^x g(t)dt \quad \forall x \in [-1, 1]$$

dunque, derivando entrambi i membri si ottiene che $f' = g$ e dunque

$$f_n \overset{n \to +\infty}{\to} f \quad \text{rispetto a} \quad \|\cdot\|_{C^1([-1,1])}$$

Suppongo ora che $\left(C^k([-1, 1]), \|\cdot\|_{C^k([-1,1])}\right)$ sia completo e mostro che lo è anche $\left(C^{k+1}([-1, 1]), \|\cdot\|_{C^{k+1}([-1,1])}\right)$: se f_n è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_{C^{k+1}([-1,1])}$, allora

$$\|f_n - f_m\|_\infty \overset{n,m \to +\infty}{\to} 0 \quad \text{e} \quad \left\|f_n^{(j)} - f_m^{(j)}\right\|_\infty \overset{n,m \to +\infty}{\to} 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, k+1\}$$

dunque in particolare f_n è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_{C^k([-1,1])}$ mentre $f^{(k+1)}$ è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_\infty$ e quindi, per ipotesi induttiva e per la completezza di $(C([-1,1]),\|\cdot\|_\infty)$,

$$f_n \overset{n\to+\infty}{\rightarrow} f \quad \text{rispetto a} \quad \|\cdot\|_{C^k([-1,1])} \quad \text{e} \quad f_n^{(k+1)} \overset{n\to+\infty}{\rightarrow} g \quad \text{rispetto a} \quad \|\cdot\|_\infty$$

dunque, analogamente a prima,

$$f^{(k)}(x) \overset{n\to+\infty}{\leftarrow} f_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(0)+\int_0^x f_n^{(k+1)}(t)dt \overset{n\to+\infty}{\rightarrow} f^{(k)}(0)+\int_0^x g(t)dt \quad \forall x \in [-1,1]$$

pertanto $f^{(k+1)} = g$ e dunque

$$f_n \overset{n\to+\infty}{\rightarrow} f \quad \text{rispetto a} \quad \|\cdot\|_{C^{k+1}([-1,1])}$$

(c) $f_n(x) = \sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}} \in C^k([-1,1])\ \forall k \in \mathbb{N}$ è di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_\infty$ perché converge a $f(x) := |x|$, infatti

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} \left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - \sqrt{x^2}\right| = \sup_{x\in[-1,1]} \left|\frac{x^2+\frac{1}{n}-x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+\sqrt{x^2}}\right| = \sup_{x\in[-1,1]} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+\sqrt{x^2}} \leq$$

$$\leq \sup_{x\in[-1,1]} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$$

tuttavia, non converge in $C^k([-1,1])$ per alcun $k \geq 1$ perché il suo limite rispetto a $\|\cdot\|_\infty$ è $f(x) = |x| \notin C^k([-1,1])$ per nessun $k \geq 1$. Dunque, $\big(C^k([-1,1]),\|\cdot\|_\infty\big)$ non è completo, perché non tutte le successioni di Cauchy convergono.

(d) Fissato m e costruisco, a partire dalle successioni f_n e f del punto precedente, $g_n \in C^k([-1,1])\ \forall k \in \mathbb{N}$ e $g \in C^m([-1,1])\backslash C^{m+1}([-1,1])$ tale che $g_n \overset{n\to+\infty}{\rightarrow} g$ rispetto a $\|\cdot\|_{C^m([-1,1])}$: in questo modo, $\forall k \in \mathbb{N}$ ho una successione di elementi di $C^k([-1,1])$ di Cauchy il cui limite non appartiene a $C^{m+1}([-1,1])$, e dunque a nessun $C^k([-1,1])$ se $k > m$, pertanto ho dimostrato che $\big(C^k([-1,1]),\|\cdot\|_{C^m([-1,1])}\big)$ non è completo.
È sufficiente prendere

$$g_n(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{m-1}} f_n(x_m)dx_m = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{m-1}} \sqrt{x_m^2+\frac{1}{n}}dx_m$$

$$g(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{m-1}} f(x_m)dx_m = \frac{x^m|x|}{(m+1)!}$$

Chiaramente $g_n \in C^k([-1,1])\ \forall k \in \mathbb{N}$, perché $g_n^{(m)} = f_n \in C^k([-1,1])\ \forall k \in \mathbb{N}$, mentre $g \in C^m([-1,1])\backslash C^{m+1}([-1,1])$ perché $g^{(m)} = |x|$ non è derivabile; infine, $g_n \overset{n\to+\infty}{\rightarrow} g$ rispetto a $\|\cdot\|_{C^m[-1,1]}$ perché

$$\left\|g_n^{(j)} - g^{(j)}\right\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} \left|\int_0^x dx_{j+1} \ldots \int_0^{x_{m-1}} (f_n(x_m) - f(x_m))dx_m\right| \leq$$

$$\leq \int_{-1}^1 dx_{j+1} \ldots \int_{-1}^1 \|f_n(x_m) - f(x_m)\|_\infty dx_m = 2^{m-j}\|f_n(x_m) - f(x_m)\|_\infty \overset{n\to\infty}{\rightarrow} 0 \quad \forall j \in \{0,\ldots,m\}$$