**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di AM220

**A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni**

**Tutore: Luca Battaglia**

Soluzioni del tutorato numero 3 (16 Marzo 2011)
Teorema delle contrazioni

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
*http://www.lifedreamers.it/liuck*

1. $$(\Phi f)(x)=\int_0^1 f(t)\arctan\left(x^2t^2\right)dt$$

   $\Phi$ è una contrazione su $(C([0,1]),\|\cdot\|_\infty)$ perché

   $$|(\Phi f)(x)-(\Phi g)(x)|=\left|\int_0^1(f(t)-g(t))\arctan\left(x^2t^2\right)dt\right|\le\int_0^1|f(t)-g(t)|\left|\arctan\left(x^2t^2\right)\right|dt\le$$

   $$\le\int_0^1\|f-g\|_\infty\frac{\pi}{4}dt=\frac{\pi}{4}\|f-g\|_\infty\ \forall x\in[0,1]$$

   quindi

   $$\|(\Phi f)(x)-(\Phi g)(x)\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|\le\frac{\pi}{4}\|f-g\|_\infty$$

   Dunque, per il teorema delle contrazioni, $\Phi$ ha un unico punto fisso, che è, come si verifica immediatamente, la funzione identicamente nulla $f(x)\equiv 0\ \forall x\in[0,1]$

2. $$(\Phi f)(x)=1+\int_0^x tf(t)dt$$

   (a) $X=\{f\in C([0,1]):0\le f(x)\le 2\ \forall x\in[0,1]\}$ è un sottoinsieme chiuso di $(C([0,1]),\|\cdot\|_\infty)$ perché contiene i limiti di tutte le sue sottosuccessioni convergenti; infatti, se $X\ni f_n\overset{n\to\infty}{\to}f$ rispetto a $\|\cdot\|_\infty$, allora $0\le f_n(x)\le 2$

   (b) $\Phi(X)\subset X$ perché

   $$0\le f(x)\le 2\ \forall x\in[0,1]\Rightarrow 1\le(\Phi f)(x)\le 1+\int_0^x 2tdt=1+x^2\le 2\ \forall x\in[0,1]$$

   $\Phi$ è una contrazione perché

   $$|(\Phi f)(x)-(\Phi g)(x)|=\left|\int_0^x t(f(t)-g(t))dt\right|\le\int_0^x t\|f-g\|_\infty dt=\frac{x^2}{2}\|f-g\|_\infty\le$$

   $$\le\frac{\|f-g\|_\infty}{2}\ \forall x\in[0,1]\Rightarrow\|(\Phi f)-(\Phi g)\|_\infty\le\frac{\|f-g\|_\infty}{2}$$

(c) Essendo $\Phi$ una contrazione, ha un'unico punto fisso $f \in X$, che è tale che $f(x) = 1 + \int_0^x tf(t)dt$; derivando entrambi i membri e calcolando in $x = 0$ si ottiene che $\begin{cases} f'(x) = xf(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$, e dunque si può trovare $f$ per separazione di variabili:

$$f'(x) = xf(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x \Rightarrow \log|f(x)| = \int_1^{f(x)} \frac{dy}{y} \overset{(y=f(t))}{=} \int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \int_0^x tdt = \frac{x^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)| = e^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow f(x) = \pm e^{\frac{x^2}{2}}$$

ma poiché f(0)=1, si può togliere il segno $\pm$ e concludere che $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.

3.

$$(\Phi x)(k) = e^{-\frac{k+2}{k+1}} x^2(k)$$

(a) $\Phi$ è una contrazione su $B = \{x \in \ell_1 : \|x\|_1 \leq 1\}$ perché

$$\|(\Phi x) - (\Phi y)\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{k+2}{k+1}} \left|x^2(k) - y^2(k)\right| = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{k+1}} |x(k) - y(k)||x(k) + y(k)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} |x(k) - y(k)|(|x(k)| + |y(k)|) \leq \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} |x(k) - y(k)| \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |x(k)| + \sum_{k=0}^{+\infty} |y(k)|\right) \leq \frac{2}{e} \|x - y\|_1$$

(b) $\Phi$ non è una contrazione su $\ell_1$ perché ha più di un punto fisso, infatti:

$$x(k) = (\Phi x)(k) = e^{-\frac{k+2}{k+1}} x^2(k) \iff 0 = e^{-\frac{k+2}{k+1}} x^2(k) - x(k) = x(k)\left(e^{-\frac{k+2}{k+1}} x(k) - 1\right) \iff$$

$$\iff \begin{cases} x(k) = 0 \\ \text{oppure} \\ x(k) = e^{\frac{k+2}{k+1}} \end{cases}$$

Affinché $x \in \ell_1$, è possibile scegliere $x(k) = e^{\frac{k+2}{k+1}}$ soltanto per finiti valori di $k$, ma in ogni caso c'è più di un punto fisso, addirittura infiniti.

4.

$$(\Phi_a x)(0) = 0 \quad \text{e} \quad (\Phi_a x)(k) = \sum_{j=1}^{k} a^j x(j) \text{ se } k \geq 1$$

(a) Se $a < 1$ allora $\Phi_a(\ell_\infty) \subset \ell_\infty$ perché

$$\|(\Phi_a x)\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left|\sum_{j=1}^{k} a^j x(j)\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} a^j \|x\|_\infty = \frac{a}{1-a} \|x\|_\infty$$

Viceversa, se $a \geq 1$, $\Phi_a(\ell_\infty) \not\subset \ell_\infty$ perché

$$x(k) = 1 \ \forall k \in \mathbb{N} \in \ell_\infty \quad \Rightarrow \quad (\Phi_a x)(k) = \sum_{j=1}^{k} a^j \begin{cases} \frac{a^{k+1}-a}{a-1} & \text{se } a > 1 \\ k & \text{se } a = 1 \end{cases} \notin \ell_\infty$$

(b) Se $a < \dfrac{1}{2}$ allora $\Phi_a$ è una contrazione su $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ perché

$$\|(\Phi_a x)-(\Phi_a y)\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{k} a^j(x(j)-y(j))\right| \le \sum_{j=1}^{\infty} a^j\|x-y\|_\infty = \frac{a}{1-a}\|x-y\|_\infty$$

con $\dfrac{a}{1-a} = \dfrac{1}{1-a} - 1 < \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$ se $a < \dfrac{1}{2}$. Viceversa, se $a \ge \dfrac{1}{2}$, $\Phi_a$ non è una contrazione perché

$$x(k)=1, y(k)=0\ \forall k\in\mathbb{N} \Rightarrow \|(\Phi_a x)-(\Phi_a y)\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{k} a^j\right| = \sum_{j=1}^{+\infty} a^j = \frac{a}{1-a} \ge 1 = \|x-y\|_\infty$$

5.
$$\begin{cases} x_0 = c \\ x_n = \frac{3}{x_{n-1}+2} \end{cases}$$

$\Phi(x) = \dfrac{3}{x+2} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ è una contrazione perché

$$|\Phi(x)-\Phi(y)| \le \sup_{t\in[0,+\infty)} |\Phi'(t)||x-y| = \sup_{t\in[0,+\infty)}\left|-\frac{3}{(t+2)^2}\right||x-y| = \frac{3}{4}|x-y|$$

Dunque, $\Phi$ ha un unico punto fisso dato dal limite della successione definita come $x_n = \Phi(x_{n-1})$ per qualsiasi scelta di $x_0 \in [0,+\infty)$; ma questa è proprio la successioe data, quindi il suo limite è l'unica soluzione non negativa dell'equazione $x = \Phi(x) = \dfrac{3}{x+2} \iff 0 = x(x+2)-3 = x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$.
Pertanto, $x_n \overset{n\to+\infty}{\to} 1\ \forall c \ge 0$.

6. $x = \log\left(x^2+3\right)$ ha un'unica soluzione positiva perché $\Phi(x) = \log\left(x^2+3\right)$ è una contrazione su $[0,+\infty)$, infatti

$$|\Phi(x)-\Phi(y)| \le \sup_{t\in[0,+\infty)} |\Phi'(t)||x-y| = \sup_{t\in[0,+\infty)}\left|\frac{2t}{t^2+3}\right||x-y| \le \frac{\sqrt{3}}{3}|x-y|$$

perché

$$\Phi''(t) = \frac{6-2t^2}{\left(t^2+3\right)^3} = 0 \iff x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \sup_{t\in[0,+\infty)}|\Phi'(t)| = \left|\Phi\left(\pm\sqrt{3}\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dunque $\Phi$ ha un unico punto fisso su $[0,+\infty)$, cioè $\exists! x \ge 0$ tale che $x = \log\left(x^2+3\right)$, e chiaramente $x \ne 0$ perché $0(0) = \log 3$, pertanto l'equazione ha un'unica soluzione positiva.

7. (a) $|\sin x| = \left|\int_0^x \cos t dt\right| \le \int_0^{|x|} |\cos t| dt \le \int_0^{|x|} dt = |x|\ \forall x\in\mathbb{R}$.

(b) $|1-\cos x| = \left|\int_0^x \sin t dt\right| \le \int_0^{|x|} |\sin t| dt \le \int_0^{|x|} t dt = \dfrac{x^2}{2}\ \forall x\in\mathbb{R}$.

(c) $|\tan x| = \dfrac{|\sin x|}{|\cos x|} \leq \dfrac{|x|}{|\cos x|} \leq \dfrac{|x|}{\cos 1} \leq \dfrac{|x|}{\cos\frac{\pi}{3}} = 2|x|$ se $|x| \leq 1$, perché $|x| \leq 1\ |\cos x| \geq \cos 1 \geq \cos\dfrac{\pi}{3}$.

(d) $|\arctan x| = \left|\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{t^2+1}\right| \leq \displaystyle\int_0^{|x|} \frac{dt}{t^2+1} \leq \displaystyle\int_0^{|x|} dt = |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(e) $|e^x - 1| = \left|\displaystyle\int_0^x e^t dt\right| \leq \displaystyle\int_0^{|x|} e^{|x|} dt \leq \displaystyle\int_0^{|x|} e dt = e|x| \leq 3|x|$ se $|x| \leq 1$.

(f) $|\sinh x| = \left|\dfrac{e^x - 1 - (e^{-x} - 1)}{2}\right| \leq \dfrac{|e^x - 1| + |e^{-x} - 1|}{2} \leq \dfrac{3|x| + 3|x|}{2} = 3|x|$ se $|x| \leq 1$.

(g) $|\cosh x - 1| = \dfrac{e^x - 1 + e^{-x} - 1}{2} \leq \dfrac{|e^x - 1| + |e^{-x} - 1|}{2} \leq 3|x|$ se $|x| \leq 1$.

(h) $|\log(x+1)| = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{t+1} \leq \displaystyle\int_0^{|x|} \frac{dt}{1 - \frac{1}{2}} = 2|x|$ se $|x| \leq \dfrac{1}{2}$.