Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 5 (30 Marzo 2011)

Teorema della funzione inversa, massimi e minimi vincolati

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo: *http://www.lifedreamers.it/liuck*

1.
$$F(x) = e^x \cos(x) - \sqrt{x^2+1}$$

(a) F è di classe C^2 in un intorno dell'origine con $F(0) = 0$, inoltre $F'(0) = \left[e^x(\cos(x) - \sin(x)) - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]_{x=0} = 1 \neq 0$, dunque per il teorema della funzione inversa $\exists r, \rho$ e $g \in C^2(B_r(0), B_\rho(0))$ tale che $F(g(u)) = u\ \forall u \in B_r(0)$

(b) Supponendo $\rho \leq 1$, posto $T = \frac{1}{F'(0)} = 1$, si ha

$$|1-TF'(x)| = \left|1 - e^x\cos(x) + e^x\sin(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| \leq |1-e^x| + |e^x - e^x\cos x| + |e^x\sin(x)| +$$

$$+ \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| \leq 3|x| + 3|1-\cos(x)| + 3|\sin(x)| + |x| \leq 4|x| + \frac{x^2}{2} + 3|x| \leq 7\rho + 3\frac{\rho^2}{2} = \frac{17}{2}\rho$$

dunque per avere $\sup\limits_{x \in B_\rho(0)} |1 - TF'(x)| \leq \frac{17}{2}\rho \leq \frac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = \frac{1}{17}$ e, di conseguenza, $r = \frac{\rho}{2\|T\|} = \frac{\rho}{2} = \frac{1}{34}$

(c) Essendo $e^{g(u)}\cos(g(u)) - \sqrt{g(u)^2+1} = u \forall u \in B_r(0)$, allora

$$1 = \left[\frac{d}{du}\left(e^g(u)\cos(g(u)) - \sqrt{g(u)^2+1}\right)\right]_{u=0} = \Big[g'(u)e^{g(u)}(\cos(g(u)) - \sin(g(u))) -$$

$$-\left.\frac{g(u)g'(u)}{\sqrt{g(u)^2+1}}\right]_{u=0} = g'(0) \Rightarrow g'(0) = 1$$

analogamente

$$0 = \left[\frac{d^2}{du^2}\left(e^g(u)\cos(g(u)) - \sqrt{g(u)^2+1}\right)\right]_{u=0} = \Big[e^{g(u)}\left(g''(u)(\cos(g(u)) - \sin(g(u))) -\right.$$

$$\left.\left. -2g'(u)^2\sin(g(u))\right) - \frac{g'(u)^2 + g''(u)g(u)\left(g(u)^2+1\right)}{\left(g(u)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\right]_{u=0} = g''(0) - 1 \Rightarrow g''(0) = 1$$

dunque lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di g è

$$g(u) = g(0) + g'(0)u + \frac{g''(0)}{2}u^2 + o\left(u^2\right) = u + \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$$

2. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita come

$$F(x,y) = \left(\cosh(x) - \frac{1}{y+1}, x + \log(\cos y)\right)$$

(a) F è di classe C^2 in un intorno dell'origine con $F(0) = 0$, inoltre $\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(0,0) = \left[\begin{pmatrix} \sinh(x) & \frac{1}{(y+1)^2} \\ 1 & -\tan(y) \end{pmatrix}\right]_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è invertibile (con $T = \left(\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(0,0)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$), dunque per il teorema della funzione inversa $\exists r, \rho$ e $g \in C^2(B_r((0,0)), B_\rho((0,0)))$ tale che $F(g(u,v)) = (u,v)\ \forall u \in B_r((0,0))$

(b) Supponendo $\rho \leq \frac{1}{2}$, si ha

$$\mathbb{I}_2 - T\frac{\partial F}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & -\tan(y) \\ \sinh(x) & 1 - \frac{1}{(y+1)^2} \end{pmatrix}$$

e dunque, essendo

$$|-\tan(y)| \leq 2|y| \leq 2\rho$$

$$|\sinh(x)| \leq 3|x| \leq 3\rho$$

$$\left|1 - \frac{1}{(y+1)^2}\right| = \frac{|y^2+2y|}{(y+1)^2} \leq \frac{\rho^2 + 2\rho}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \leq 12\rho$$

per avere $\sup_{(x,y)\in B_\rho((0,0))} \left\|\mathbb{I}_2 - T\frac{\partial F}{\partial(x,y)}\right\| \leq 2 \sup_{(x,y)\in B_\rho((0,0))} \left\|\mathbb{I}_2 - T\frac{\partial F}{\partial(x,y)}\right\|_\infty \leq 24\rho \leq \frac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = \frac{1}{48}$ e, di conseguenza, $r = \frac{1}{192} = \frac{\rho}{4} = \frac{\rho}{4\|T\|_\infty} \leq \frac{\rho}{2\|T\|}$

(c) Essendo $\left(\cosh(g_1(u,v)) - \frac{1}{g_2(u,v)+1}, g_1(u,v) + \log(\cos(g_2(u,v)))\right) = (u,v)$, allora

$$1 = \left[\frac{d}{du}\left(\cosh(g_1(u,v)) - \frac{1}{g_2(u,v)+1}\right)\right]_{(u,v)=(0,0)} = \left[\frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v)\sinh(g_1(u,v)) + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v)}{(g_2(u,v)+1)^2}\right]_{(u,v)=(0,0)} = \frac{\partial g}{\partial u}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial u}(0,0) = 1$$

analogamente

$$0 = \left[\frac{d}{dv}\left(\cosh(g_1(u,v)) - \frac{1}{g_2(u,v)+1}\right)\right]_{(u,v)=(0,0)} = \left[\frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v)\sinh(g_1(u,v)) + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v)}{(g_2(u,v)+1)^2}\right]_{(u,v)=(0,0)} = \frac{\partial g}{\partial v}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial u}(0,0) = 0$$

$$0 = \left[\frac{d}{du}\left(g_1(u,v) + \log(\cos(g_2(u,v)))\right)\right]_{(u,v)=(0,0)} = \left[\frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial g_2}{\partial u}\tan(g_2(u,v))\right]_{(u,v)=(0,0)} =$$

$$= \frac{\partial g_1}{\partial u}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial g_1}{\partial u}(0,0) = 0$$

$$0 = \left[\frac{d}{dv}\left(g_1(u,v) + \log(\cos(g_2(u,v)))\right)\right]_{(u,v)=(0,0)} = \left[\frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial g_2}{\partial v}\tan(g_2(u,v))\right]_{(u,v)=(0,0)} =$$

$$= \frac{\partial g_1}{\partial v}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial g_1}{\partial u}(0,0) = 1$$

dunque lo sviluppo di Taylor al primo ordine di g è

$$g_1(u,v) = g_1(0,0) + \langle \nabla g_1(0,0), (u,v)\rangle + o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right) = v + o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)$$

$$g_2(u,v) = g_2(0,0) + \langle \nabla g_2(0,0), (u,v)\rangle + o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right) = u + o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)$$

3.

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\} \quad f(x,y) = xy$$

A è la circonferenza unitaria centrata nell'origine, dunque è compatto, e quindi f, essendo continua, ammette massimo e minimo su A; inoltre, $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\right\}$ per $g(x,y) = 1$, dunque, per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, i punti di massimo e di minimo per f su A risolvono $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$, ovvero:

$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \end{cases}$$

Se fosse $x = 0$, nella prima equazione si avrebbe $y = 0$, ma l'origine non appartiene ad A, dunque è possibile dividere per x la prima equazione e trovare $\lambda = \dfrac{y}{2x}$, e sostituendo nella seconda equazione si ottiene $x = \dfrac{y^2}{x} \Rightarrow x^2 = y^2$, e sostituendo nuovamente nel vincolo si ha $2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; pertanto, si trovano i seguenti punti:

$$P_{++} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad P_{+-} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad P_{-+} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad P_{--} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

valutando infine la funzione nei quattro punti, si trova che

$$\max_A f = f(P_{\pm,\pm}) = \frac{1}{2} \quad \min_A f = f(P_{\pm,\mp}) = -\frac{1}{2}$$

4.

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\} \quad f(x,y,z) = xyz^2$$

A è il tetraedro delimitato dai piani coordinati e dal piano di equazioni $x + y + z = 1$, dunque è compatto, e quindi f, essendo continua, ammette massimo e minimo su A; inoltre, $f \geq 0$ su A e $f = 0$ se e solo se una delle tre coordinate è nulla; pertanto,

$$\min_A f = f(0,x,y) = f(x,0,z) = f(x,y,0) = 0$$

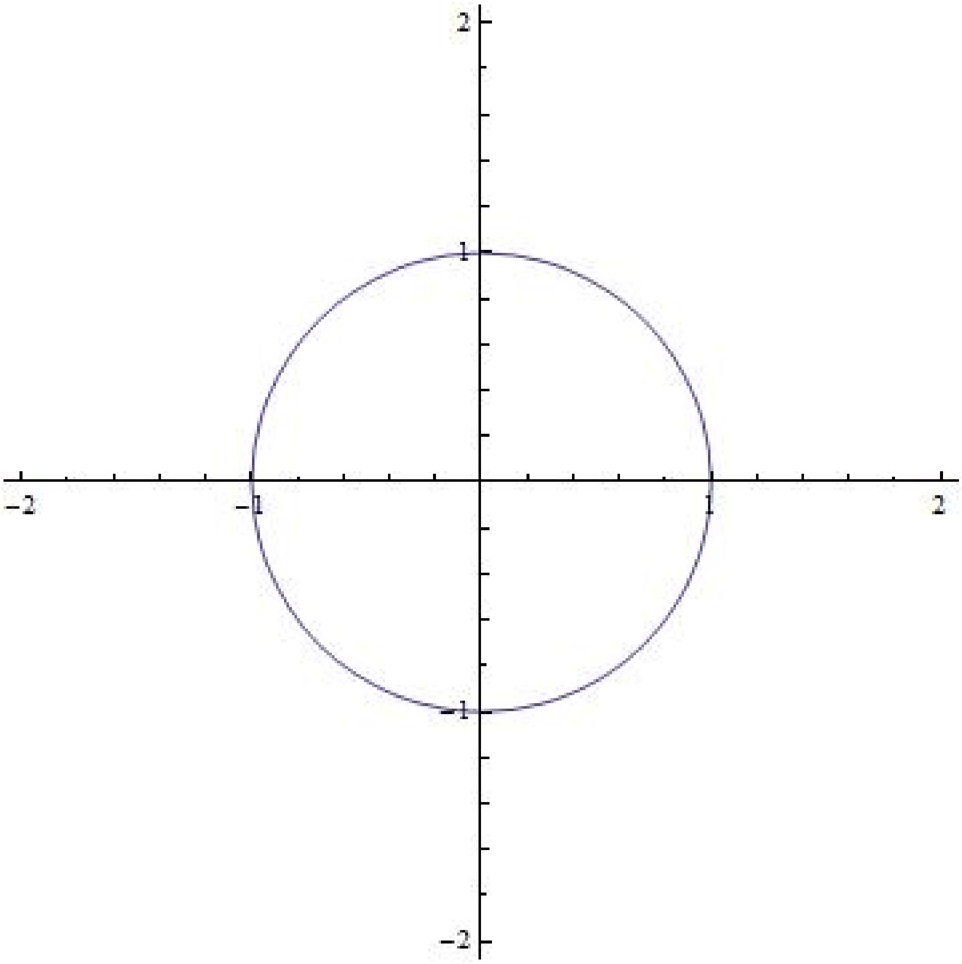

Figure 1: $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$

Per quanto riguarda il massimo, invece, potrà essere raggiunto all'interno di A oppure sul bordo: nel primo caso, i punti di massimo risolvono $\nabla f(x, y) = (0, 0)$, ovvero

$$\begin{cases} yz^2 = 0 \\ xz^2 = 0 \\ 2xyz = 0 \end{cases}$$

Tuttavia, tutte le soluzioni sono punti in cui la funzione si annulla, e dunque punti di minimo, pertanto il massimo non verrà raggiunto all'interno di A ma sul bordo, in particolare sulla faccia superiore del bordo di A, in quanto sulle altre la funzione si annulla; questa porzione di bordo può essere scritta come $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}$, dove $g(x, y, z) = x + y + z$, pertanto i punti di massimo risolvono $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$, ovvero:

$$\begin{cases} yz^2 = \lambda \\ xz^2 = \lambda \\ 2xyz = \lambda \end{cases}$$

Sostituendo all'interno della seconda equazione il valore di λ trovato nella prima si ottiene $xz^2 = yz^2$, e dunque $x = y$, perché $f(x, y, 0) = 0$, sostituendo entrambe le quantità nell'ultima equazione si trova $2y^2z = 2xyz = yz^2 \Rightarrow z = 2y$ e sostituendo infine nell'equazione del vincolo si trova $1 = x + y + z = y + y + 2y = 4y \Rightarrow y = \frac{1}{4}$, dunque l'unica soluzione è

$$P = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

pertanto

$$\max_A f = f(P) = \frac{1}{64}$$

I punti della parabola $y = 2 - x^2$ che distano meno dall'origine sono i punti della parabola dove la funzione distanza all'origine al quadrato $f(x, y) = x^2 + y^2$ raggiunge il valore minimo; poiché la parabola può essere scritta come $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\right\}$ per $g(x, y) = x^2 + y - 2$, allora i punti in cui viene raggiunto il minimo sono soluzioni di $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, ovvero

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 2y = \lambda \end{cases}$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima si ottiene $2x = 4xy$, ovvero $x = 0$ oppure $y = \frac{1}{2}$; sostituendo questi valori nel vincolo si ottengono i punti

$$P_0 = (0, 2) \quad P_+ = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad P_- = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Calcolando f nei tre punti si trova che $f(P_0) = 4$ e $f(P_\pm) = \frac{7}{4}$, dunque i punti di minima distanza dell'origine sono gli ultimi due.

6.

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\right\} \quad f(x, y) = (x - 5)^2 + 2y^2$$

A è la regione di piano che si trova al di sopra della parabola di equazioni $y = x^2$, dunque è illimitato, ma è chiuso e dunque f, essendo continua e coerciva, ammette minimo su A; tuttavia, f è illimitata su A perché

$$\sup_A f \geq f(0, n) = 2n^2 \stackrel{n \to +\infty}{\to} +\infty$$

Per quanto riguarda il minimo, non può trovarsi all'interno di A perché $\nabla f(x, y) = (2(x - 5), 4y)$ si annulla solo in $(5, 0) \notin A$; dunque, viene raggiunto sul bordo, cioè su $\partial A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\right\}$, dove $g(x, y) = y - x^2$, pertanto i punti di minimo risolvono:

$$\begin{cases} 2(x - 5) = -2\lambda x \\ 4y = \lambda \end{cases}$$

Si ottiene $2(x-5) = -8xy \Rightarrow x = \dfrac{5}{4y+1}$, sostituendo nel vincolo si ottiene $0 = y - \dfrac{25}{(4y+1)^2} = \dfrac{\left(16y^2+24y+25\right)(y-1)}{(4y+1)^2} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1$, quindi

$$\min_A f = f(1,1) = 18$$

7.

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 1\right\} \qquad f(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(yt)dt$$

(a) f è definita $\iff$ $x > 0$ oppure $y = 0$, in particolare $\forall (x,y) \in A$ perché $(x-2)^2 \leq (x-2)^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x-2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$.

(b)

$$f(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(yt)dt = -\frac{1}{x}[e^{-xt}\sin(yt)]_0^{+\infty} - \frac{y}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos(yt)dt =$$

$$= -\frac{y}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos(yt)dt = -\frac{y}{x}\left(-\frac{1}{x}[e^{-xt}\cos(yt)]_0^{+\infty} + \frac{y}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(yt)dt\right) =$$

$$= \frac{y}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(yt)dt \Rightarrow \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(yt)dt = \frac{y}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(yt)dt = \frac{y}{x^2+y^2}$$

(c) A è la circonferenza unitaria centrata in $(2,0)$, dunque e compatta e pertanto f, essendo continua, ammette massimo e minimo su A: se il massimo o il minimo di f su A fossero raggiunti all'interno, allora verificherebbero

$$(0,0) = \nabla f(x,y) = \left(-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)$$

tuttavia, dalla seconda equazione si ricava $y = \pm x$ e, sostituendo nella seconda, si ottiene $\mp\dfrac{2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$, ma l'origine non è un punto di A e quindi sia il massimo che il minimo sono raggiunti in $\partial A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\right\}$, dove $g(x,y) = (x-2)^2 + y^2 - 1$, quindi

$$\begin{cases} -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 2\lambda(x-2) \\ \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 2\lambda y \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava che $\lambda = \dfrac{x^2-y^2}{2y\left(x^2+y^2\right)^2}$, oppure $y = 0$ ma in quest'ultimo caso $x = 0$ e $(0,0) \notin A$; sostituendo nella prima equazione si ottiene $-\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \dfrac{\left(x^2-y^2\right)(x-2)}{y\left(x^2+y^2\right)^2} \Rightarrow -2xy^2 = \left(x^2-y^2\right)(x-2) \Rightarrow$

$y^2 = \dfrac{2x^2 - x^3}{x+2}$; sostituendo nel vincolo si ottiene $1 = (x-2)^2 + \dfrac{2x^2 - x^3}{x+2} = \dfrac{8-4x}{x+2} \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \dfrac{6}{5} \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-(x-2)^2} = \pm\dfrac{3}{5}$; dunque i possibili punti di massimo o di minimo sono

$$P_+ = \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right) \quad P_- = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

Calcolando infine la funzione nei due punti si trova

$$\max_A f = f(P_+) = \frac{1}{3} \quad \min_A f = f(P_-) = -\frac{1}{3}$$

8. Se $y = (0, \dots, 0)$, allora $\langle x, y\rangle \equiv 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ e dunque anche il suo massimo e il minimo tra i vettori di norma unitaria sono entrambi zero; altrimenti, fissato $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ la funzione $f(x) = \langle x, y\rangle$ è di classe C^1 su $\mathbb{R}^n$; inoltre, la sfera $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ può essere scritta come $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$, dove $g(x) = \|x\|^2 - 1$; dunque, per trovare il massimo e il minimo di f su S si può usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: essendo $\nabla f(x) = (y_1, \dots, y_n)$ e $\nabla g(x) = (2x_1, \dots, 2x_n)$, i punti di massimo e di minimo risolvono

$$\begin{cases} y_1 = 2\lambda x_1 \\ \dots \\ y_n = 2\lambda x_n \end{cases}$$

Poiché $\lambda \neq 0$, altrimenti $(y_1, \dots, y_n) = (0, \dots, 0)$, allora si ha $x_i = \dfrac{y_i}{2\lambda}$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$; sostituendo nel vincolo si ottiene $1 = \|x\| = \dfrac{\|y\|}{2|\lambda|} \Rightarrow \lambda = \pm\dfrac{\|y\|}{2} \Rightarrow x = \pm\dfrac{y}{\|y\|}$; calcolando la funzione nei due punti si ottiene

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \langle x, y\rangle = \left\langle \frac{y}{\|y\|}, y \right\rangle = \|y\| \qquad \min_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \langle x, y\rangle = \left\langle -\frac{y}{\|y\|}, y \right\rangle = -\|y\|$$

In particolare, $\|x\| = 1 \Rightarrow |\langle x, y\rangle| \leq \|y\|$; se invece $x \in \mathbb{R}^n$ è un vettore qualsiasi non nullo, chiaramente $\dfrac{x}{\|x\|}$ ha norma unitaria, dunque per quanto appena visto $\left\langle \dfrac{x}{\|x\|}, y \right\rangle \leq \|y\| \Rightarrow \langle x, y\rangle \leq \|x\|\|y\|$, disuguaglianza che ovviamente è vera anche per $x = 0$, in quanto entrambi i membri sono nulli.

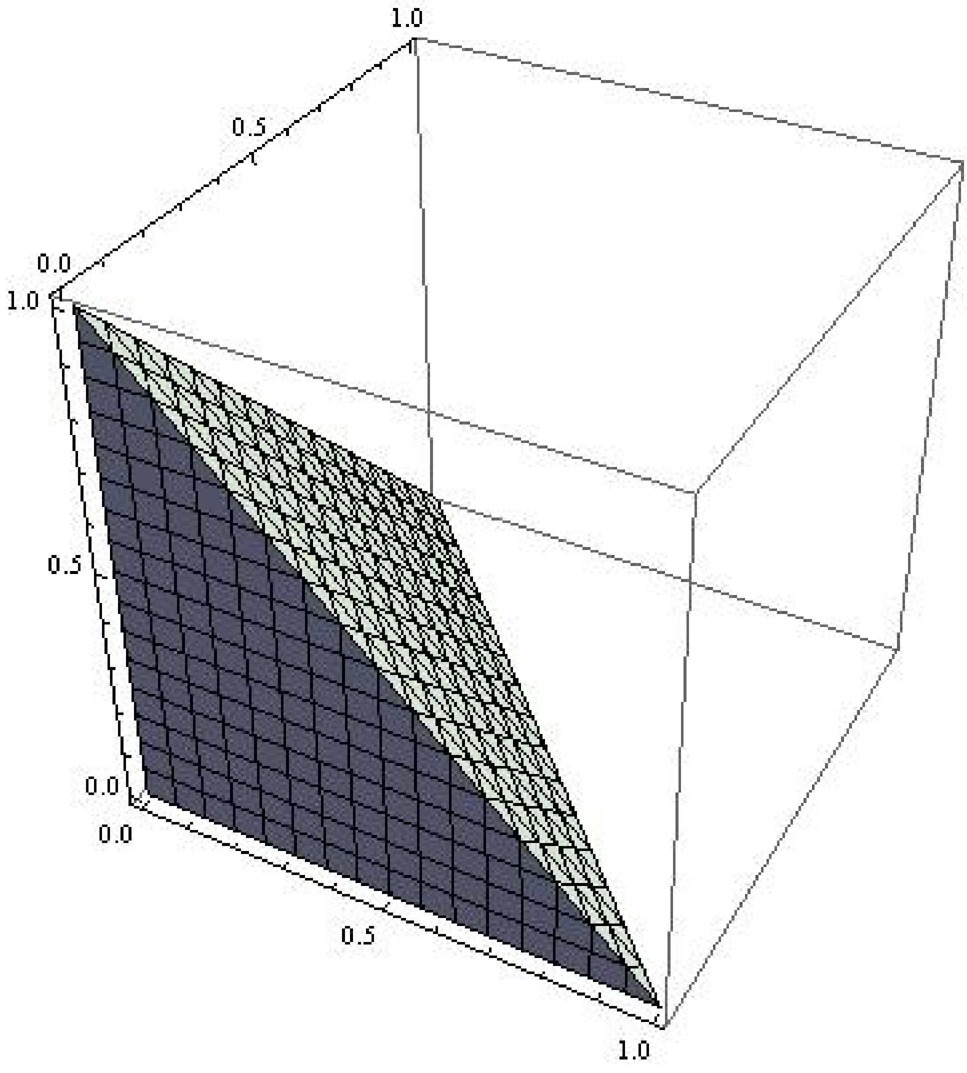

Figure 2: $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}$

5.

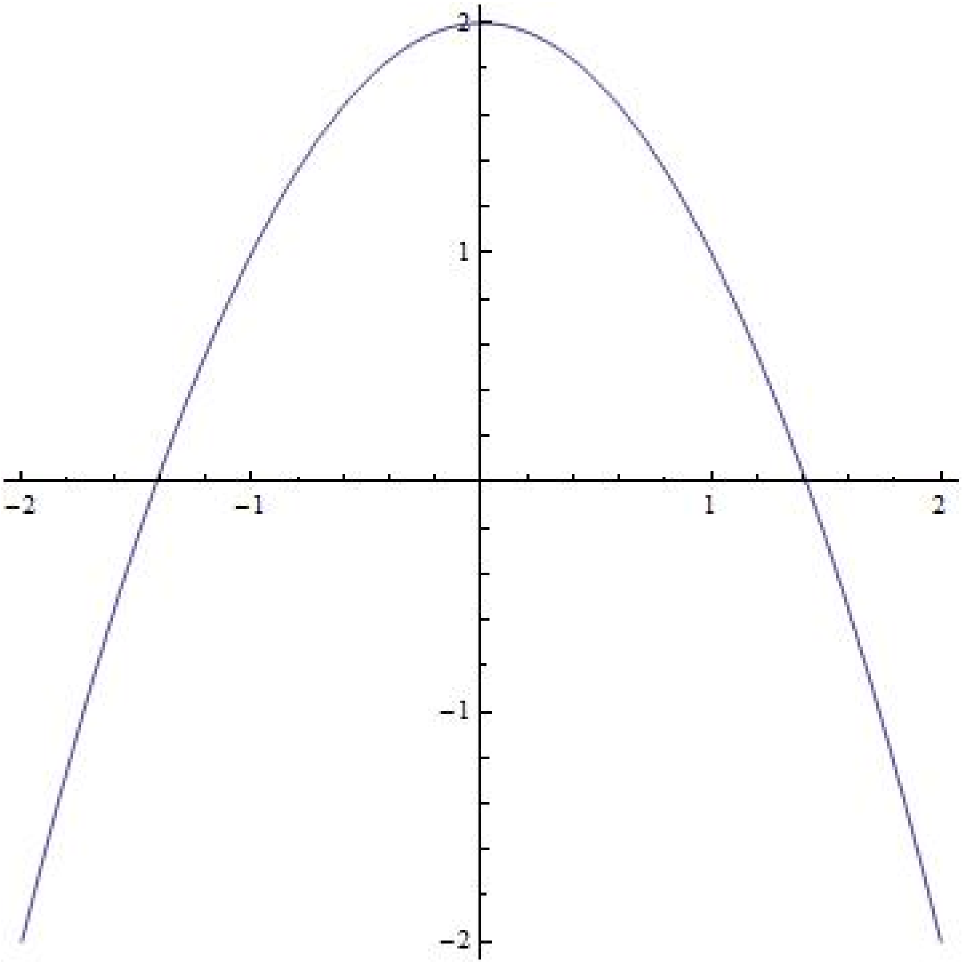

Figure 3: Parabola di equazioni $y = 2 - x^2$

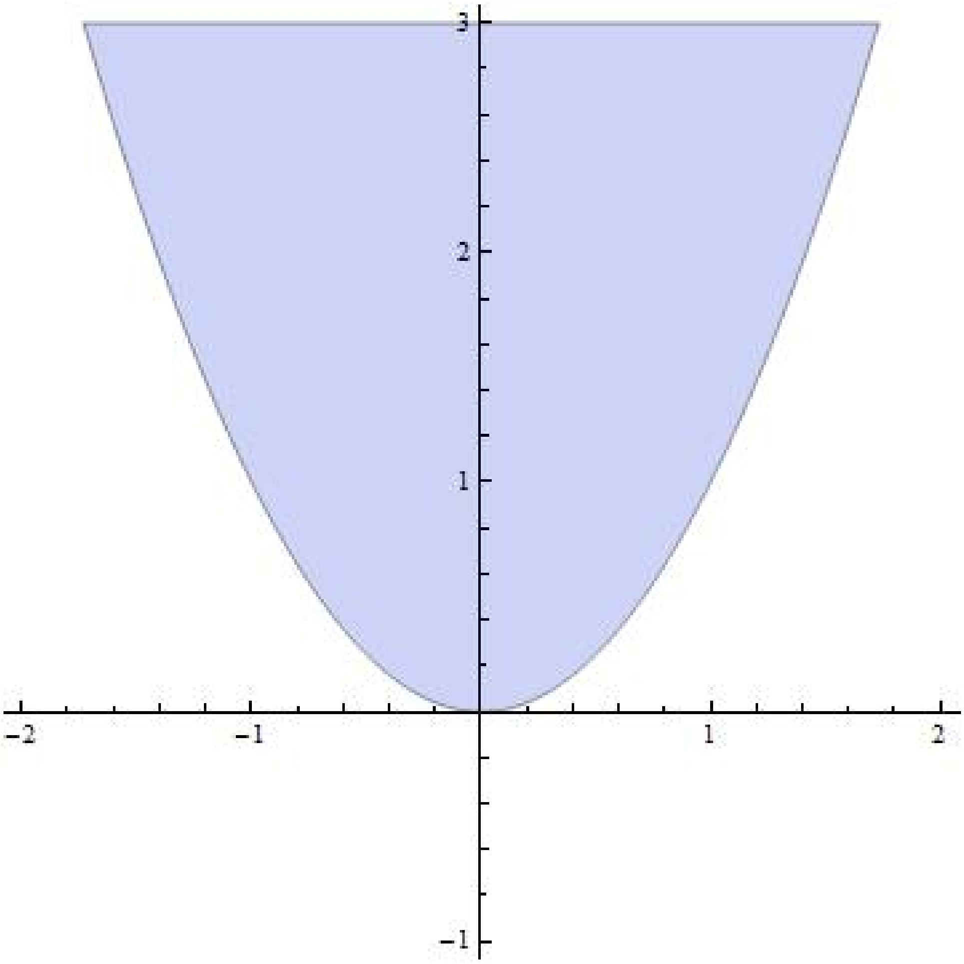

Figure 4: $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\right\}$

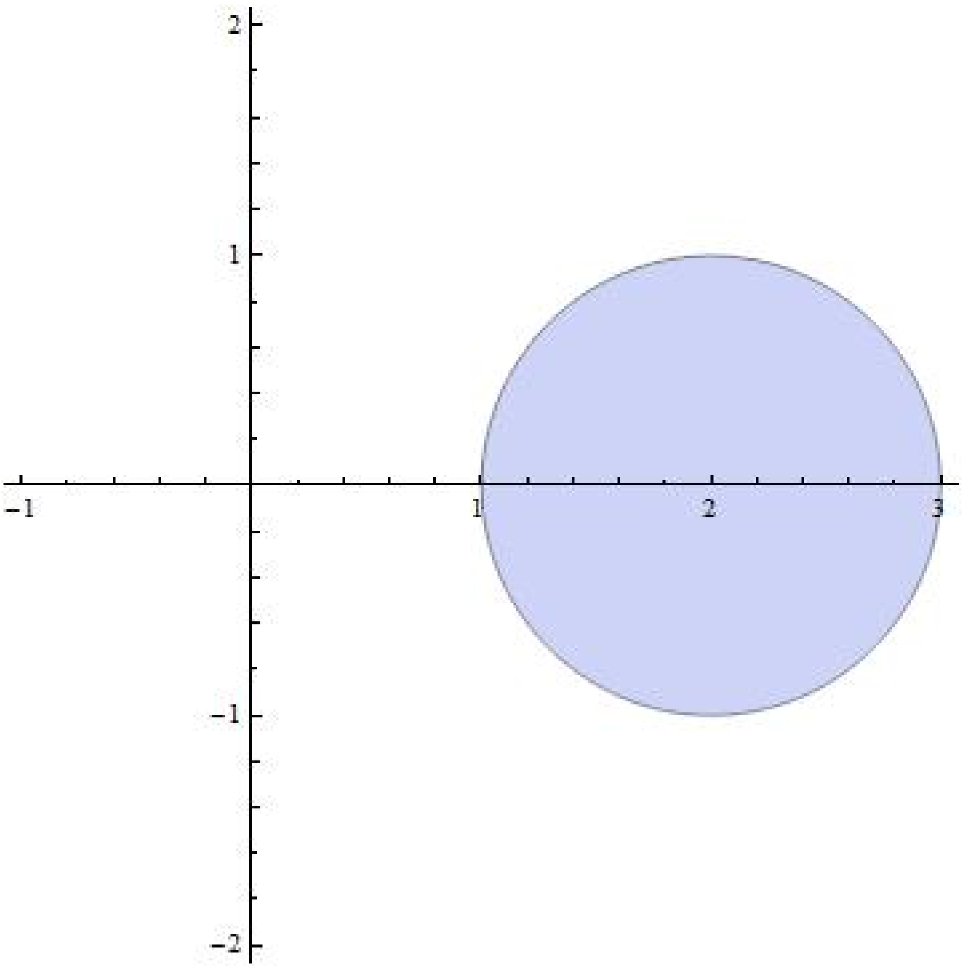

Figure 5: $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 1\right\}$