Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 6 (6 Aprile 2011)
Massimi e minimi vincolati, ripasso

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1.
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1\right\} \qquad f(x,y) = x(y+1)$$

A è il settore del disco unitario delimitato dalla retta di equazioni $y = 1 - x$,

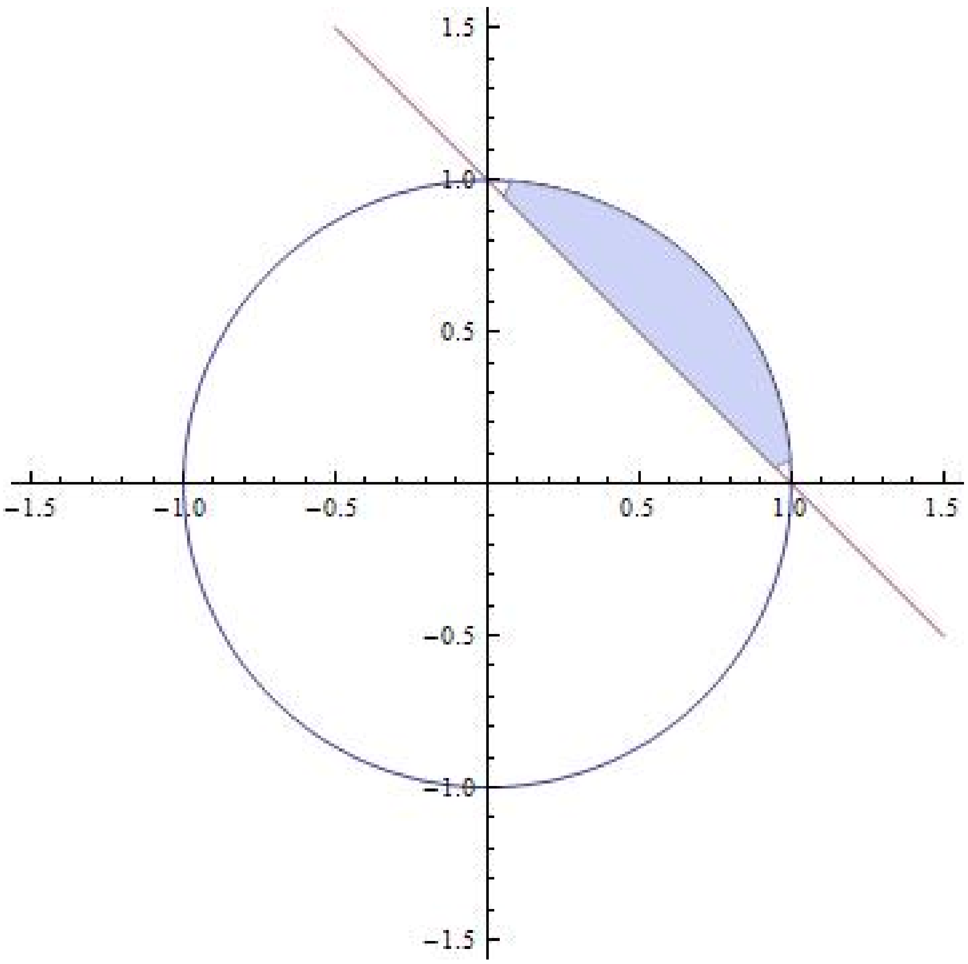

Figure 1: $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1\right\}$

dunque è compatto e pertanto f, essendo continua, ammette massimo e minimo su A: questi valori sono raggiunti all'interno di A, oppure all'interno del segmento $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1, 0 < x < 1\}$, oppure lungo l'arco $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, o infine nell'intersezione tra queste due curve, cioè nei punti $(1, 0)$ e $(0, 1)$; nel primo caso si tratta di massimi e minimi liberi, cioè soluzioni di

$$(0, 0) = \nabla f(x, y) = (y + 1), x$$

tuttavia, l'unica soluzione è il punto $(-1, 0)$ che però non appartiene al vincolo; cerco dunque massimi e minimi su A_1: poiché $A_1 \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ con $g(x, y) = x + y - 1$, allora questi punti risolveranno $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, ovvero:

$$\begin{cases} y + 1 = \lambda \\ x = \lambda \end{cases}$$

ovvero $x = y + 1$, che sostituito nel vincolo da $2y + 1 = 1$, cioè $y = 0$ e, di conseguenza, $x = 1$; tuttavia, il punto $(1, 0)$ non si trova all'interno del vincolo e quindi verrà considerato separatamente; analogamente si procede per $A_2 \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ con $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$: le soluzioni risolvono

$$\begin{cases} y + 1 = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \end{cases}$$

poichè per $x = 0$ non ci sono punti all'interno del vincolo, nella seconda equazione si può dividere per x trovando così $\lambda = \dfrac{x}{2y}$ che, sostituito nella prima equazione da $y + 1 = \dfrac{x^2}{y}$, ovvero $y^2 + y = x^2$, e sostituendo nuovamente nel vincolo si ottiene $2y^2 + y - 1 = 0$, ovvero $y = \dfrac{1}{2}$ e $y = -1$, ma appartiene all'insieme A soltanto la prima soluzione, a cui corrisponde il punto

$$P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Calcolando la funzione negli altri possibili punti di massimo/minimo

$$P_2 = (1, 0) \quad P_3 = (0, 1)$$

si ottiene che

$$\max_f = f(P_1) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \min_f = f(P_3) = 0$$

2.

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\right\} \quad f(x, y, z) = \frac{x + y}{z^2 + 1}$$

A è il cilindro verticale avente per base il disco unitario, dunque è chiuso ma non limitato; tuttavia, poiché $(x_n, y_n, z_n) \in A, \|(x_n, y_n, z_n)\| \to +\infty \Rightarrow |z_n| \to \infty$, si ha che $\lim_{(x_n, y_n, z_n) \in A, \|(x_n, y_n, z_n)\| \to +\infty} f(x_n, y_n, z_n) = 0$, mentre la funzione cambia segno in A, e dunque $\sup_A f > 0$ e $\inf_A f < 0$ vengono raggiunti e sono dunque dei minimi; se fossero raggiunti all'interno si avrebbe

$$(0, 0, 0) = \nabla f(x, y, z) = \left(\frac{1}{z^2 + 1}, \frac{1}{z^2 + 1}, -\frac{2(x + y)z}{(z^2 + 1)^2}\right)$$

che è assurdo, dunque sia massimo che minimo sono raggiunti sul bordo, che ha equazioni $\partial A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0\right\}$ per $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$, pertanto i punti di massimo e di minimo risolvono

$$\begin{cases} \frac{1}{z^2+1} = 2\lambda x \\ \frac{1}{z^2+1} = 2\lambda y \\ -\frac{2(x+y)z}{(z^2+1)^2} = 0 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ricava $\lambda \neq 0$ e $2\lambda x = \dfrac{1}{z^2+1} = 2\lambda y$, cioè $x = y \neq 0$, mentre dall'ultima si ottiene $z = 0$; sostituendo nell'equazione del vincolo si ottiene $x = y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ovvero i punti

$$P_{\pm} = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

calcolando infine la funzione nei punti si trova

$$\max_A f = f(P_+) = \sqrt{2} \quad \min_A f = f(P_-) = -\sqrt{2}$$

Un cilindro avente raggio della base pari a r e altezza pari h ha superficie laterale pari a $2\pi rh$, mentre quella di ogni base è πr^2, dunque la superficie totale è $2\pi\left(r^2 + rh\right)$, mentre il volume è $\pi r^2 h$, pertanto massimizzare il volume dei cilindri con superficie totale pari a 2π equivale a massimizzare la funzione $f(r,h) = \pi r^2 h$ sul vincolo $A = \left\{(h,r) :\in \mathbb{R}^2 : r^2 + rh = 1, r > 0, h > 0\right\}$: il vincolo non è compatto, ma per $(r,h) \to (1,0)$ e $(r,h) \to (0,+\infty)$ la funzione, positiva su tutto il vincolo, si annulla, e dunque il massimo viene raggiunto, e sarà una soluzione del sistema $\nabla f(h,r) = \lambda \nabla g(h,r)$, dove $g(h,r) = r^2 + rh$ cioè:

$$\begin{cases} 2\pi rh = \lambda(2r+h) \\ \pi r^2 = \lambda r \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $\lambda = \pi r$, che sostituito nella prima da $2\pi rh = \pi r(2r+h)$, cioè $2h = 2r + h$, ovvero $h = 2r$; sostituendo nel vincolo si ottiene $3r^2 = 1 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, pertanto i cilindri di volume massimo hanno raggio pari a $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e altezza pari a $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, e il loro volume è $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi$.

4.
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -b \le x \le b, 0 \le y \le a\left(b^2 - x^2\right)\right\}$$

L'insieme A è normale nella variabile y, cioè è del tipo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c_1 \le x \le c_2, f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$, pertanto la sua area può essere calcolata con il teorema di Fubini:

$$Area(A) = \int_A 1 dxdy = \int_{-b}^{b} dx \int_0^{a\left(b^2-x^2\right)} dy = \int_{-b}^{b} a\left(b^2 - x^2\right) dx = \left[ab^2 x - \frac{a}{3}x^3\right]_{-b}^{b} = \frac{4}{3}ab^3$$

Per massimizzare questa quantità sul vincolo $a^2 + b^2 = 1$, noto che per $a \to 0$ oppure $b \to 0$ la quantità $\dfrac{4}{3}ab^3$ tende a 0, dunque il massimo è raggiunto all'interno e quindi risolve

$$\begin{cases} \frac{4}{3}b^3 = 2\lambda a \\ 4ab^2 = 2\lambda b \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $\lambda = 2ab$, sostituendo nell'altra si ha $\dfrac{4}{3}b^3 = 4a^2 b \Rightarrow a^2 = \dfrac{b^2}{3}$, inserendo nel vincolo si ottiene $\dfrac{4}{3}b^2 = 1 \Rightarrow b = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$, e per questi valori si ottiene

$$\max_{a^2+b^2=1} \frac{4}{3}ab^3 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

5.

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 - 1 \leq y \leq \min\left\{x+1, \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, x^4 - 1 \leq y \leq \min\left\{x+1, \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\}\right\}$$

L'insieme A è normale rispetto alla variabile y quindi, come nell'esercizio precedente,

$$Area(A) = \int_A 1 dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^4-1}^{\min\left\{x+1, \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\}} =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x^4-1}^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} dy + \int_{-1}^0 dx \int_{x^4-1}^{x+1} dy = \int_0^1 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^4 + 1\right) dx + \int_{-1}^0 \left(x + 1 - x^4 + 1\right) dx =$$

$$= \left[\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{x^5}{5} + x\right]_0^1 + \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^0 = \frac{2}{\pi} + \frac{21}{10}$$

6.

$$x_n = \frac{\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) + 1}{k^2}$$

$x_n \overset{n\to\infty}{\to} x$ in ℓ_2, ove $x(k) = \dfrac{1}{k^2}$, infatti:

$$\|x_n - x\|_2^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)^2}{k^4} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\frac{k^2}{n^4}}{k^4} = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

la convergenza c'è anche in ℓ_1 perché

$$\|x_n - x\|_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left|\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\right|}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left|\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\right|}{k^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\left|\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\right|}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n^2}}{k^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

7.
$$(\Phi f)(x) = \int_0^1 \sin(x\sin(\pi t)f(t))dt$$

Φ è una contrazione su $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ perché

$$\|\Phi f - \Phi g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^1 (\sin(x\sin(\pi t)f(t)) - \sin(x\sin(\pi t)g(t)))dt \right| \leq$$

$$\leq \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |\sin(x\sin(\pi t)f(t)) - \sin(x\sin(\pi t)g(t))|dt \leq \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |x\sin(\pi t)f(t) - x\sin(\pi t)g(t)|dt \leq$$

$$\leq |x|\|f-g\|_\infty \int_0^1 \sin(\pi t)dt \leq \|f-g\|_\infty \left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}\|f-g\|_\infty$$

8.
$$F(x,y_1,y_2) = \left(\left(y_2^2+1\right)e^{\arctan x} - y_1, \frac{y_2}{y_1} + \sin\left(x^2\right)\right)$$

(a) F è di classe C^2 in un intorno di $(0,1,0)$, inoltre $F(0,1,0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,1,0) = \left[\begin{pmatrix} -1 & 2y_2e^{\arctan x} \\ -\frac{y_2}{y_1^2} & \frac{1}{y_1} \end{pmatrix}\right]_{(x,y_1,y_2)=(0,1,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile (con $T^{-1} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}(0,1,0)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$), dunque per il teorema della funzione implicita $\exists r, \rho > 0, g \in C^2(B_r(0), B_\rho((1,0)))$ tali che $F(x, g_1(x), g_2(x)) \equiv 0\ \forall x \in B_r(0)$.

(b) Supponendo $r \leq 1, \rho \leq \frac{1}{2}$, si ha

$$\|F(x,1,0)\| = \sqrt{\left(e^{\arctan x}-1\right)^2 + \sin\left(x^2\right)} \leq \left|e^{\arctan x}-1\right| + \left|\sin\left(x^2\right)\right| \leq 3|\arctan x| + \left|x^2\right| \leq$$

$$3|x| + r^2 \leq 4r$$

e dunque, per avere $\sup_{x\in B_r(0)} \|F(x,1,0)\| \leq 4r \leq \frac{\rho}{4} = \frac{\rho}{4\|T\|_\infty} \leq \frac{\rho}{2\|T\|}$ è sufficiente prendere $r = \frac{\rho}{16}$; inoltre,

$$\mathbb{I}_2 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x,y_1,y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2y_2e^{\arctan x} \\ -\frac{y_2}{y_1^2} & \frac{1}{y_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2y_2e^{\arctan x} \\ \frac{y_2}{y_1^2} & 1-\frac{1}{y_1} \end{pmatrix}$$

e dunque, essendo

$$\left|-2y_2e^{\arctan x}\right| \leq 2|y_2|e^{|x|} \leq 6|y_2| \leq 6\rho$$

$$\left|\frac{y_2}{y_1^2}\right| \leq \frac{|y_2|}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4|y_1| \leq 4\rho$$

$$\left|1-\frac{1}{y_1}\right| = \left|\frac{y_1-1}{y_1}\right| \leq \frac{\rho}{1-\frac{1}{2}} = 2\rho$$

per avere $\sup_{(x,y_1,y_2)\in B_r(0)\times B_\rho((1,0))} \left\| \mathbb{I}_2 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y_1,y_2)\right\| \le$
$\le 2 \sup_{(x,y_1,y_2)\in B_r(0)\times B_\rho((1,0))} \left\| \mathbb{I}_2 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y_1,y_2)\right\|_{\infty} \le 12\rho \le \dfrac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = \dfrac{1}{24}$ e, di conseguenza, $r = \dfrac{1}{384}$.

(c) Essendo $\left(g_2(x)^2+1\right)e^{\arctan x} - g_1(x) \equiv 0 \ \forall x \in B_r(0)$, allora

$$0 = \left[\frac{d}{dx}\left(\left(g_2(x)^2+1\right)e^{\arctan x} - g_1(x)\right)\right]_{x=0} = \left[\left(2g_2(x)g_2'(x) + \frac{g_2(x)^2+1}{x^2+1}\right)e^{\arctan x} - \right.$$

$$\left. - g_1'(x)\right]_{x=0} = 1 - g_1'(0) \Rightarrow g_1'(0) = 1$$

analogamente

$$0 = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{g_2(x)}{g_1(x)} + \sin\left(x^2\right)\right)\right]_{x=0} = \left[\frac{g_2'(x)g_1(x) - g_2(x)g_1'(x)}{g_1(x)^2} + 2x\cos\left(x^2\right)\right]_{x=0} = g_2'(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_2'(0) = 0$$

Dunque lo sviluppo di Taylor al primo ordine di g è

$$g_1(x) = 1 + x + o(x) \quad g_2(x) = o(x)$$

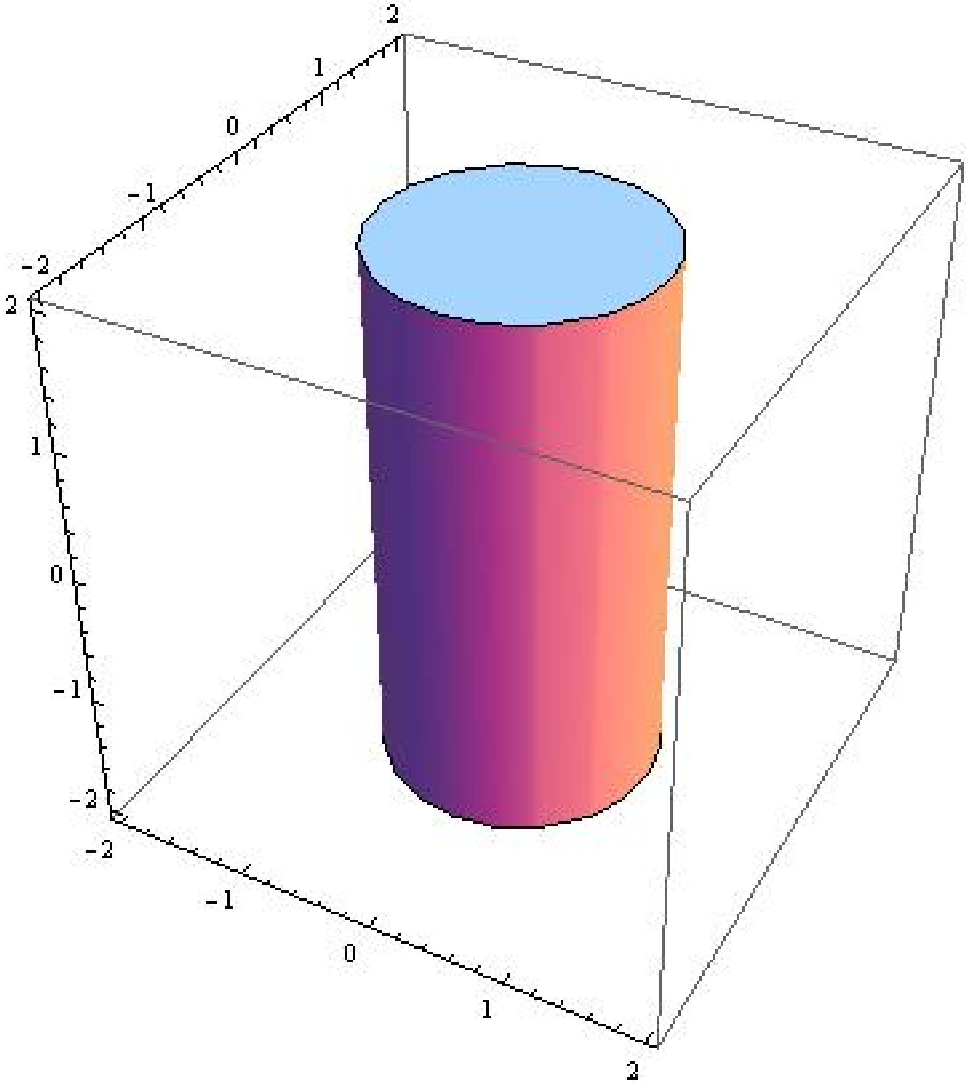

Figure 2: $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

3.

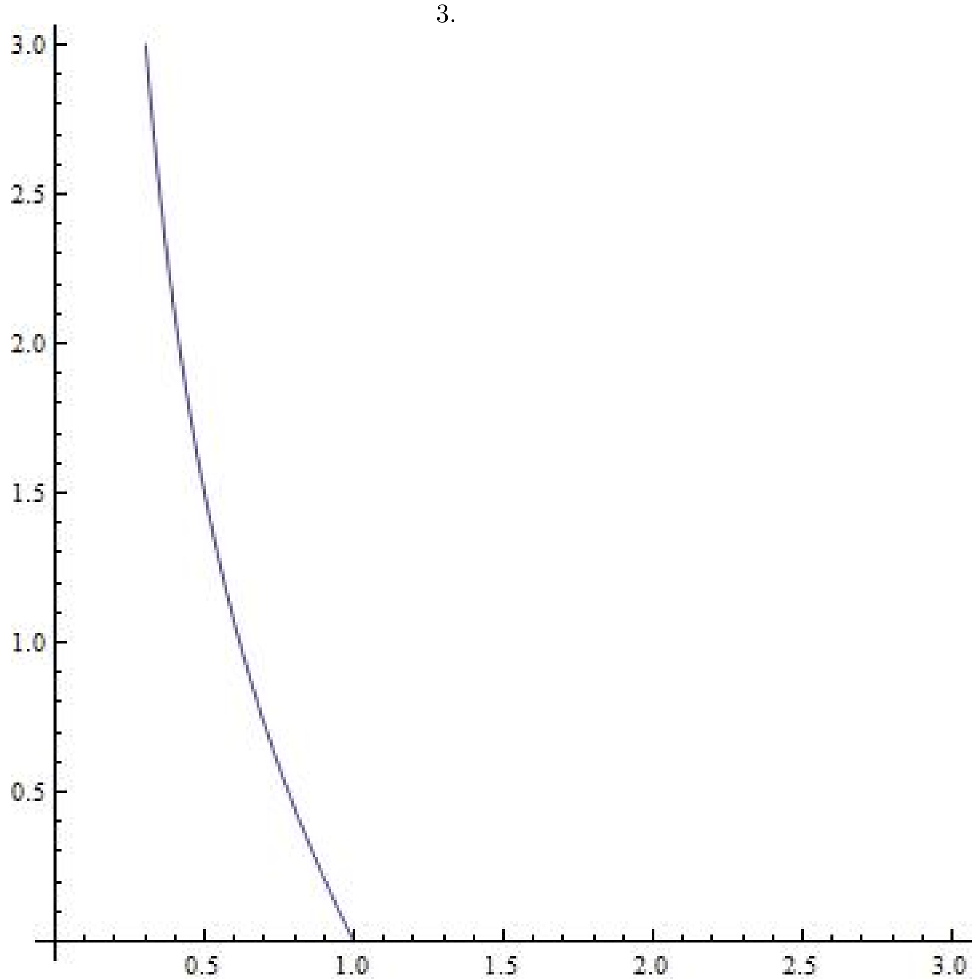

Figure 3: $A = \left\{(h,r) :\in \mathbb{R}^2 : r^2 + rh = 1, r > 0, h > 0\right\}$

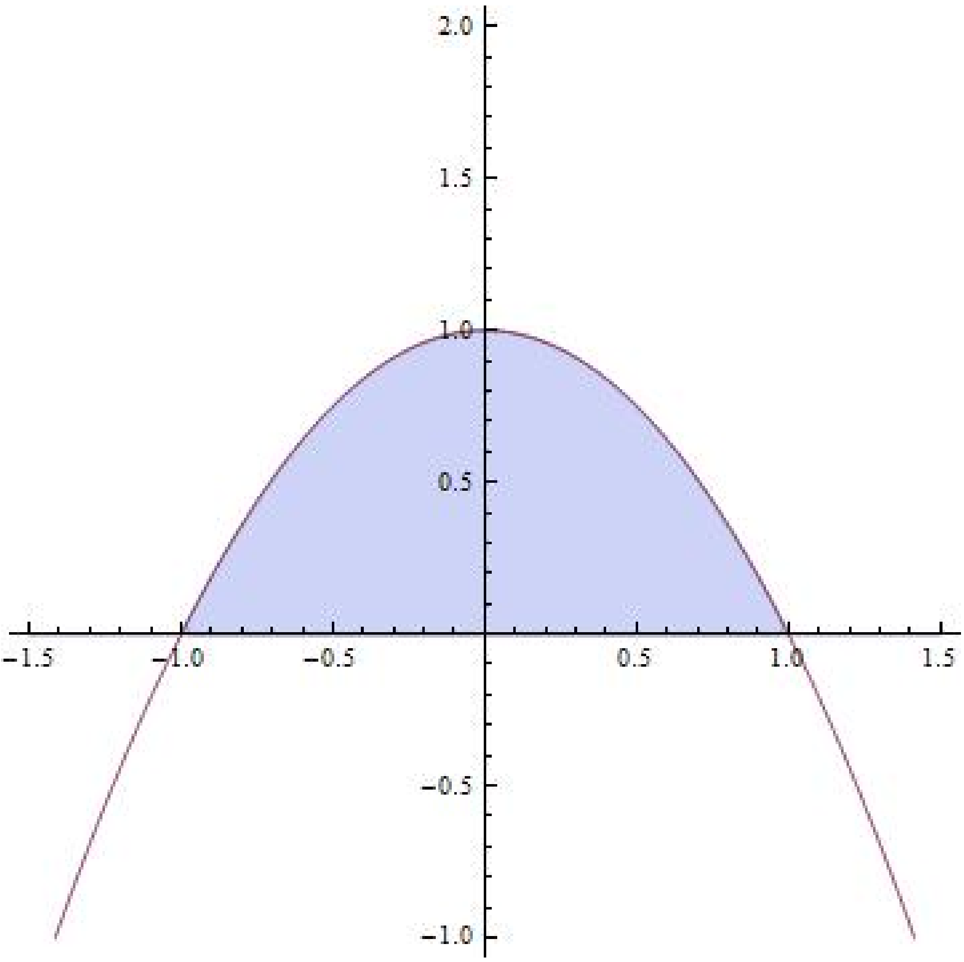

Figure 4: $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -b \leq x \leq b, 0 \leq y \leq a\left(b^2 - x^2\right)\right\}$

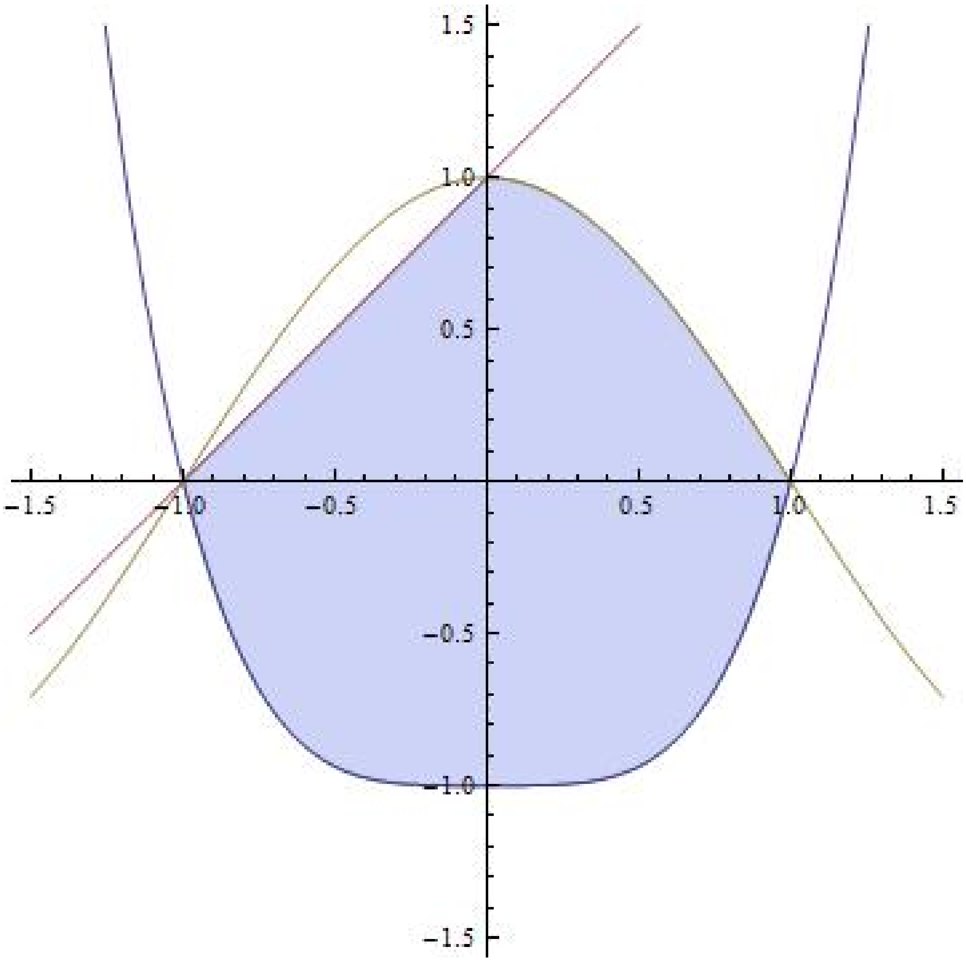

Figure 5: $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 - 1 \leq y \leq \min\left\{x+1, \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\}\right\}$