Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

Soluzioni del tutorato numero 7 (27 Aprile 2011)

Integrali

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1.
$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le e^x \right\}$$

A è la regione del piano compresa tra gli assi cartesiani e le rette di

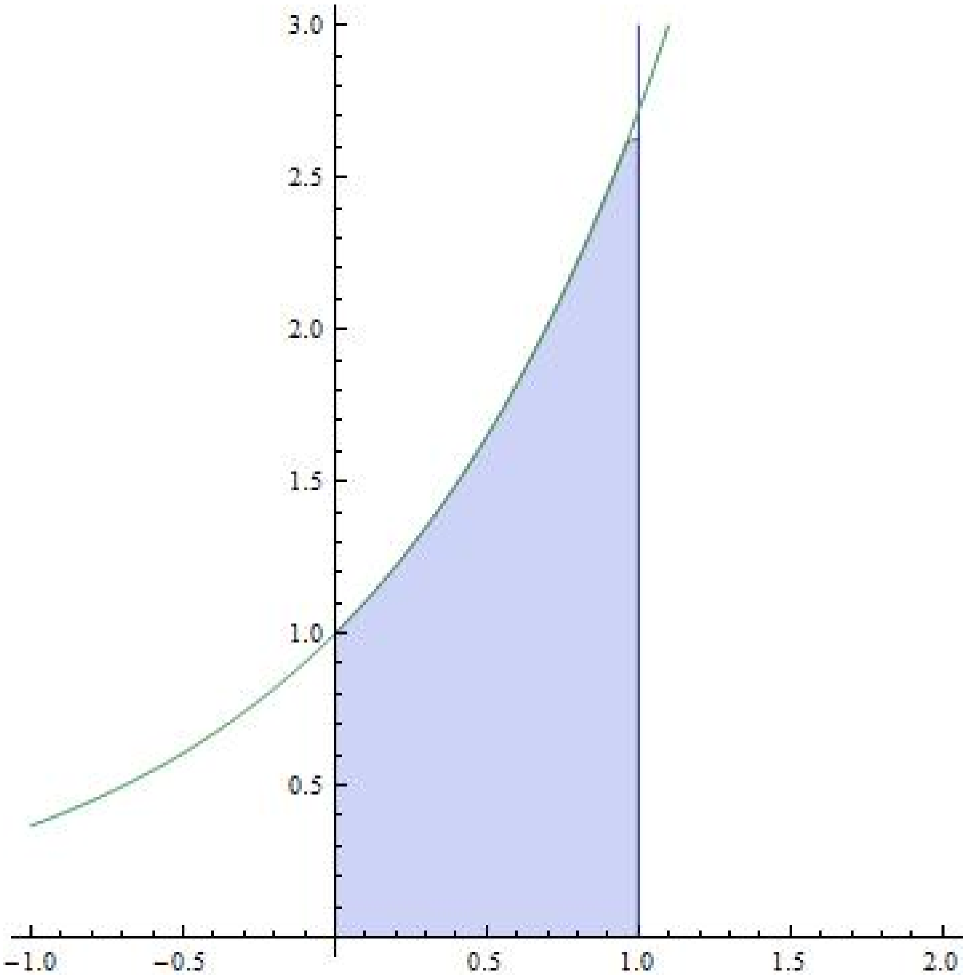

Figure 1: $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le e^x \right\}$

equazioni $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$ e il grafico della funzione $y = e^x$, dunque è normale rispetto alla variabile x e quindi per il teorema di Fubini si ha

$$\int_A xydxdy = \int_0^1 dx \int_0^{e^x} xydy = \int_0^1 dx \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^{e^x} = \int_0^1 \frac{xe^{2x}}{2} = \left[\frac{xe^{2x}}{4}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{4}dx = \frac{e^2}{4} - \left[\frac{e^{2x}}{8}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{e^2+1}{8}$$

2.

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, x \le y \le 1\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y\right\}$$

A è il triangolo compreso tra le rette di equazioni $x = 0$, $y = 1$ e $x = y$,

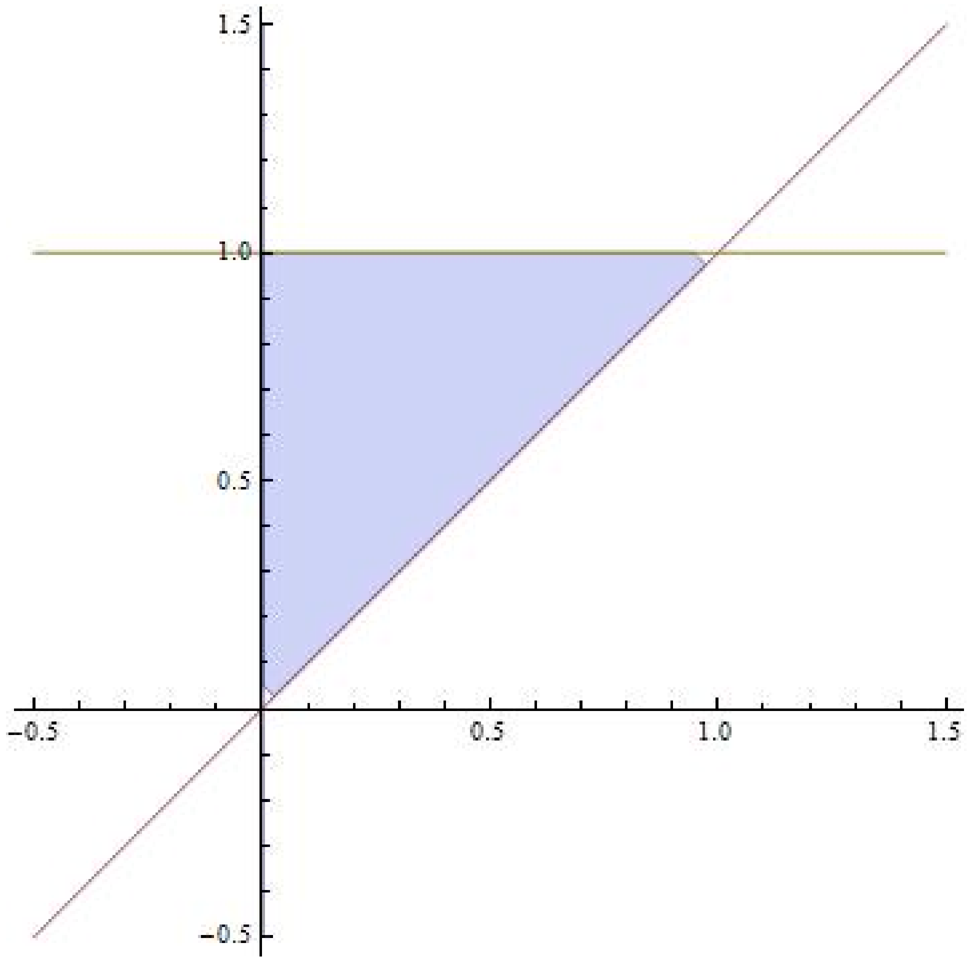

Figure 2: $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, x \le y \le 1\right\}$

dunque è normale rispetto alla variabile y e quindi per il teorema di Fubini si ha

$$\int_A e^{-y^2} dxdy = \int_0^1 dy \int_0^y dx e^{-y^2} = \int_0^1 y e^{-y^2} = \left[-\frac{e^{-y^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$$

3.

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq z, 0 \leq x \leq y \right\}$$

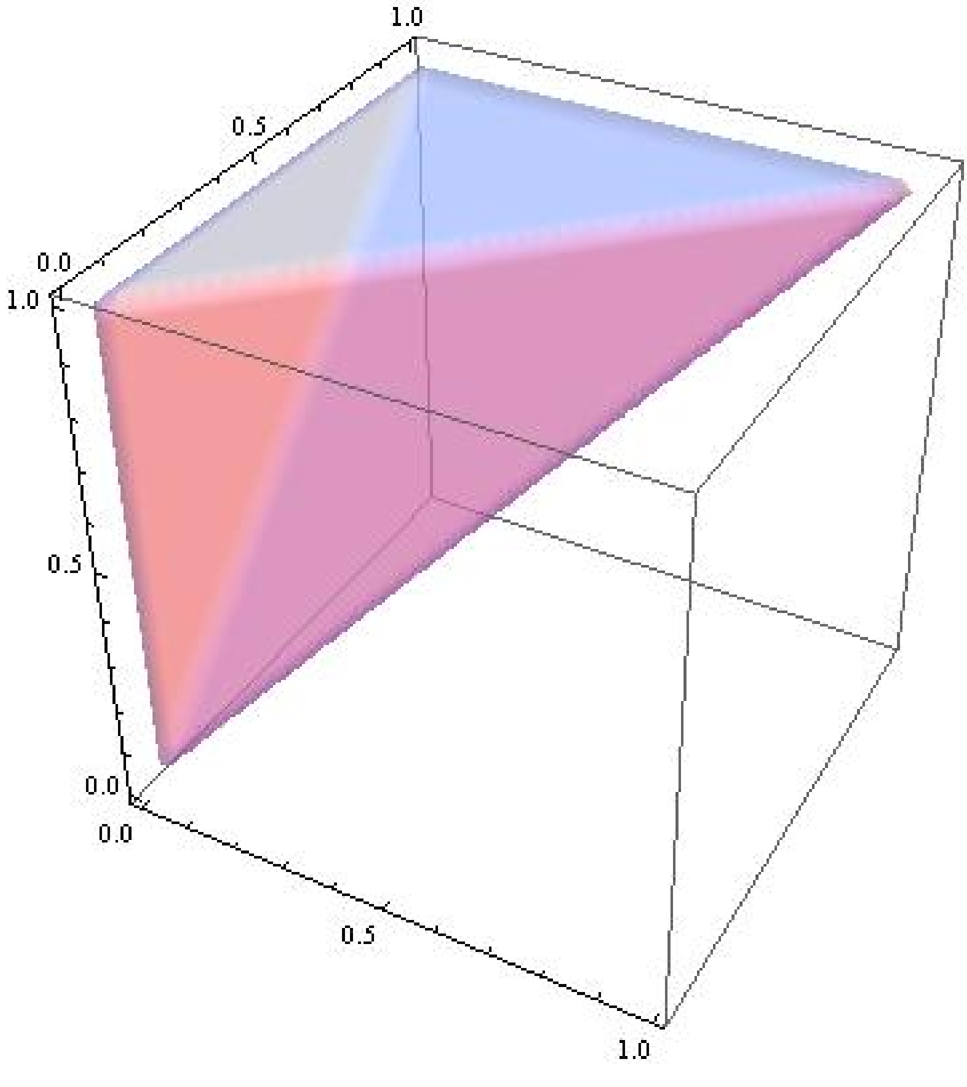

Figure 3: Il tetraedro avente come vertici i punti $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,1)$ e $(1,1,1)$

$$\int_A \sin(\pi xyz) y^2 z^4 dxdydz = \int_0^1 dz \int_0^z dy \int_0^y \sin(\pi xyz) y^2 z^4 dx = \int_0^1 dz \int_0^z dy \left[-\frac{\cos(\pi xyz) y z^3}{\pi} \right]_0^y =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^z dy \frac{yz^3\left(1-\cos\left(\pi y^2 z\right)\right)}{\pi} = \int_0^1 dz \left[\frac{y^2 z^3}{2\pi} - \frac{z^2 \sin\left(\pi y^2 z\right)}{2\pi^2}\right]_0^z =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{z^5}{2\pi} - \frac{z^2 \sin\left(\pi z^3\right)}{2\pi^2}\right) dz = \left[\frac{z^6}{12\pi} + \frac{\cos\left(\pi z^3\right)}{6\pi^3}\right]_0^1 = \frac{1}{12\pi} - \frac{1}{3\pi^3}$$

4.

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, y \le z \le y e^{x^3-y^3}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, y \le z \le y e^{x^3-y^3}\right\}$$

$$\int_A x^2 y e^{y^3} dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_y^{ye^{x^3-y^3}} x^2 y e^{y^3} dz = \int_0^1 dx \int_0^x x^2 y e^{y^3}\left(y e^{x^3-y^3} - y\right) dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x x^2 y^2 \left(e^{x^3} - e^{y^3}\right) dy = \int_0^1 dx \left[\frac{x^2\left(y^3 e^{x^3} - e^{y^3}\right)}{3}\right]_0^x = \int_0^1 \frac{x^5 e^{x^3}}{3} dx + \int_0^1 dx \frac{x^2\left(1-e^{x^3}\right)}{3} =$$

$$= \left[\frac{x^3 e^{x^3}}{9}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2 e^{x^3}}{3} dx + \left[\frac{x^3 - e^{x^3}}{9}\right]_0^1 = \frac{e}{9} - \left[\frac{e^{x^3}}{9}\right]_0^1 + \frac{2-e}{9} = \frac{1}{3} - \frac{e}{9}$$

5.

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4, x + y \ge 2\right\}$$

A è la regione di piano delimitata dalla circonferenza centrata nell'origine di raggio 2 e la retta di equazioni $x + y = 2$; poiché $A = B \backslash C$, con

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\right\}$$

l'intersezione tra il disco centrato nell'origine di raggio 2 e il primo quadrante, e

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \le 2, x \ge 0, y \ge 0\right\}$$

il triangolo con vertici in $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$, che è normale rispetto alla variabile x. Passando a coordinate polari per il primo insieme si ha $\Phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ e $\Phi^{-1}(B) = \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] : \rho^2 \le 1, \rho\cos\theta \ge 0, \rho\sin\theta \ge 0\right\} =$ $= \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] : 0 \le \rho \le 1, 0 \le \rho \le \frac{\pi}{2}\right\}$, dunque essendo il determinante jacobiano pari a ρ

$$\int_A y^3 dxdy = \int_B y^3 dxdy - \int_C y^3 dxdy = \int_{\Phi^{-1}(B)} \rho^4 \sin^3\theta d\rho d\theta - \int_0^2 dx \int_0^{2-x} y^3 dy =$$

$$= \int_0^2 \rho^4 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta - \int_0^2 dx \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^{2-x} = \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\left(1-\cos^2\theta\right) d\theta - \int_0^2 \frac{(2-x)^4}{4} dx =$$

$$= \frac{32}{5}\left[\frac{\cos^3 t}{3} - \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{(x-2)^5}{20}\right]_0^2 = \frac{64}{15} - \frac{8}{5} = \frac{8}{3}$$

6.
$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2+y^2 \leq 1, \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \frac{1}{4} \right\}$$

A è la porzione del disco unitario centrato nell'origine contenuta nel semipiano di equazioni $x > 0$ meno la circonferenza centrata in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ di raggio $\frac{1}{2}$. Passando a coordinate polari si ha $\Phi^{-1}(A) =$
$= \left\{ (\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \cos\theta \leq \rho \leq 1 \right\}$ e dunque,

$$\int_A x dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\cos\theta}^{1} \rho^2 \cos\theta d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[\frac{\rho^3\cos\theta}{3}\right]_{\cos\theta}^{1} =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\left(1-\cos^3\theta\right)}{3} d\theta = \left[\frac{\sin\theta}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos(2\theta))^2}{1} 2d\theta =$$

$$= \frac{1}{3} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos(4t)}{2}4 + \frac{\cos(2t)}{12} + \frac{1}{8}\right) d\theta = \frac{1}{3} - \left[\frac{\sin(4t)}{96} + \frac{\sin(2t)}{24} + \frac{t}{8}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{8}$$

7.

$$A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, z^2 \leq x^2+y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}$$

A è la porzione del primo ottante delimitata dalla sfera unitaria centrata nell'origine e dal cono con vertice nell'origine, asse verticale e angolo di apertura $\frac{\pi}{4}$. Passando in coordinate polari si ha $\Phi(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)$ e $\Phi^{-1}(A) = \left\{ (\rho,\theta,\varphi) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \times [0,\pi] : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$, dunque essendo il determinante jacobiano pari a $\rho^2 \sin\varphi$

$$\int_A \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^3+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho^2\sin\theta}{\rho^6+1} d\rho = \frac{\pi}{2} \left[-\cos\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\arctan\left(\rho^3\right)}{3}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{48}\pi^2$$

8.
$$A_n = \left\{ (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ \forall i = 1,\ldots,n, \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1 \right\}$$

Per $n = 1$, A_n è l'intervallo $[0,1]$, che ha misura pari a $1 = \frac{1}{1!}$, dunque la base dell'induzione è provata. Supponiamo ora che A_n abbia misura pari a $\frac{1}{n!}$ e mostriamo che A_{n+1} ha misura pari a $\frac{1}{(n+1)!}$: poiché

$$A_{n+1} = \left\{ (x_1,\ldots,x_n,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq t \leq 1, x_i \geq 0 \ \forall i = 1,\ldots,n, \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1-t \right\}$$

allora la sua misura è

$$\int_0^1 dt \int_{A_{n,t}} dx_1 \ldots dx_n$$

ove

$$A_{n,t} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ \forall i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1 - t \right\}$$

Con il cambio di variabile

$$(x_1, \ldots, x_n) = \Phi(y_1, \ldots, y_n) = ((1-t)y_1, \ldots, (1-t)y_n)$$

che ha determinante jacobiano pari a $(1-t)^n$, si ottiene

$$\int_0^1 dt \int_{A_{n,t}} dx_1 \ldots dx_n = \int_0^1 dt \int_{\Phi^{-1}(A_{n,t})} (1-t)^n dy_1 \ldots dy_n =$$

$$= \int_0^1 dt(1-t)^n \int_{A_n} dx_1 \ldots dx_n = \frac{1}{n!} \left[-\frac{(1-t)^{(n+1)}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)n!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

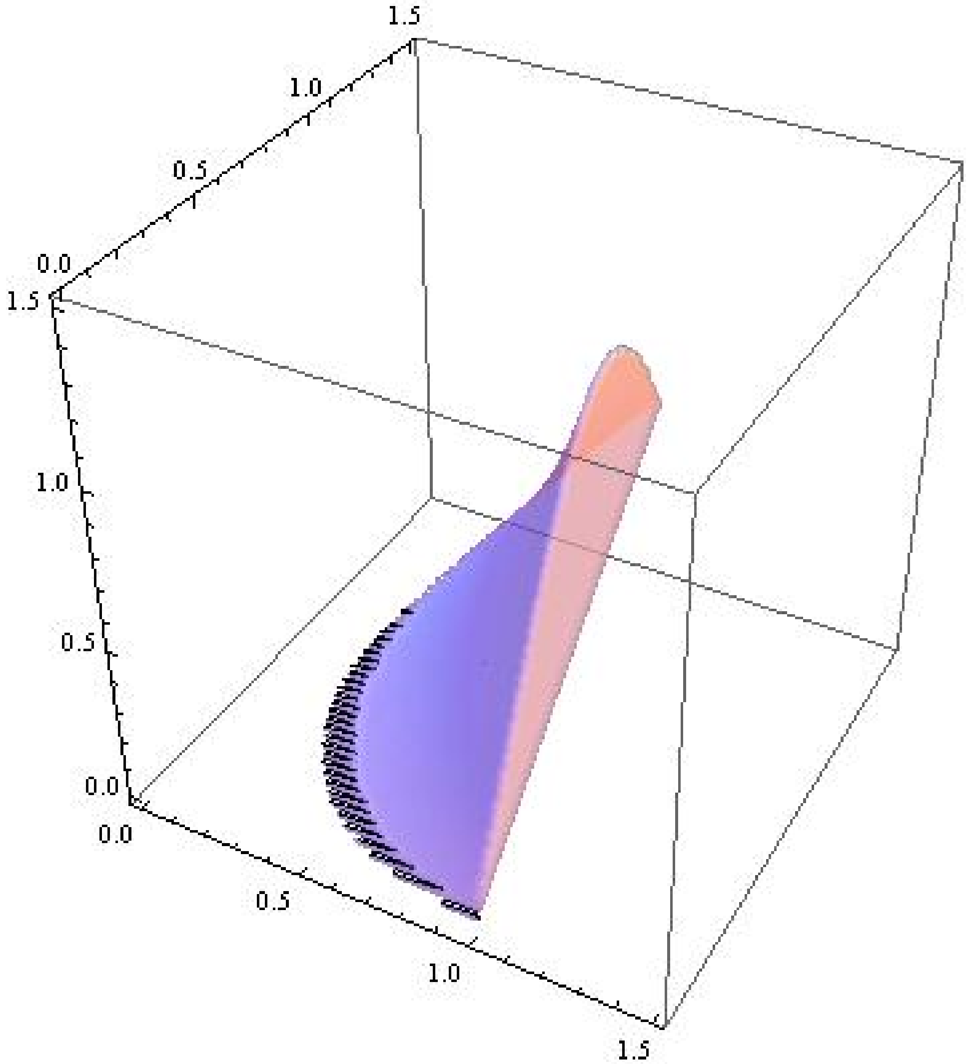

Figure 4: $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, y \leq z \leq ye^{x^3 - y^3}\right\}$

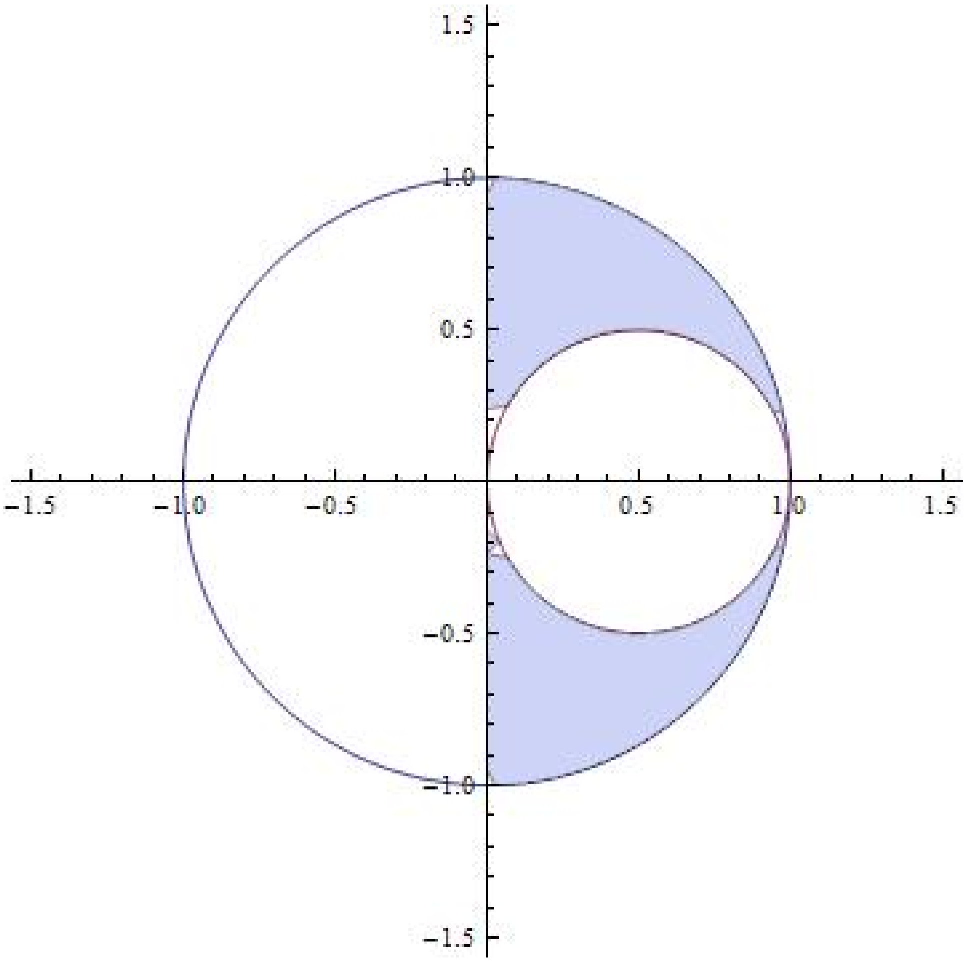

Figure 5: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x + y \leq 2\}$

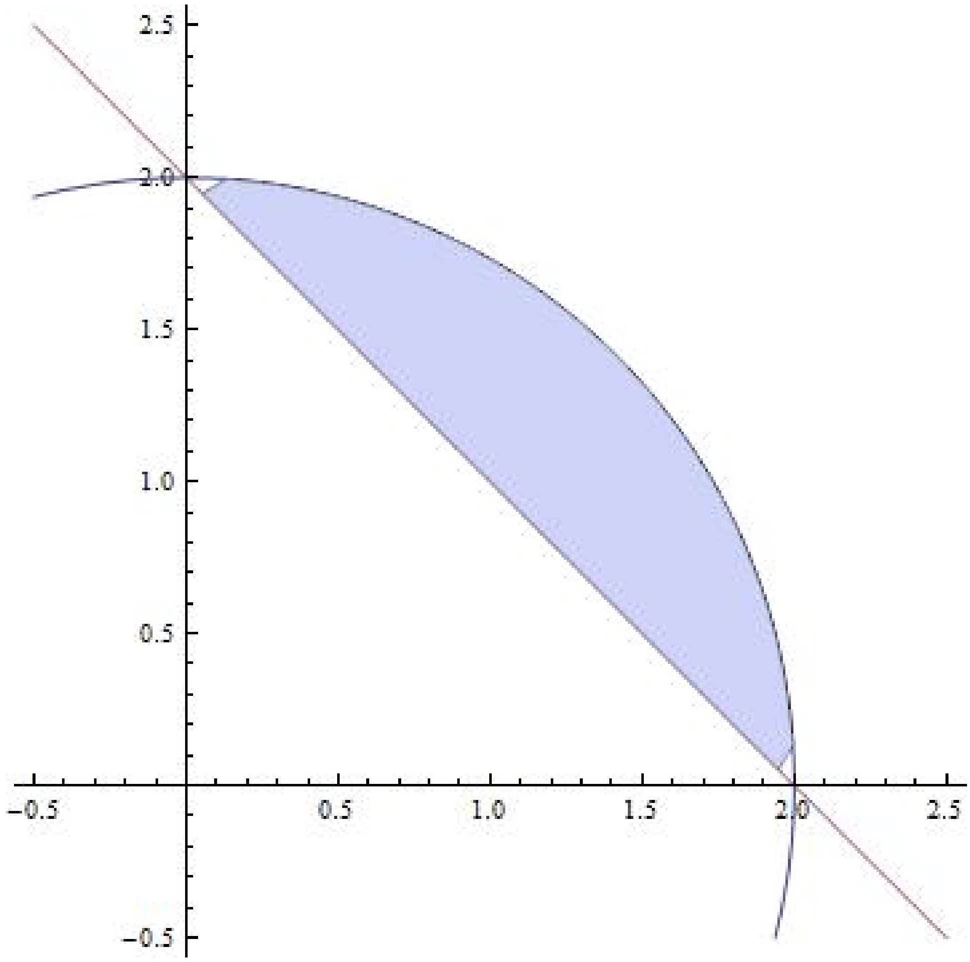

Figure 6: $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}\right\}$

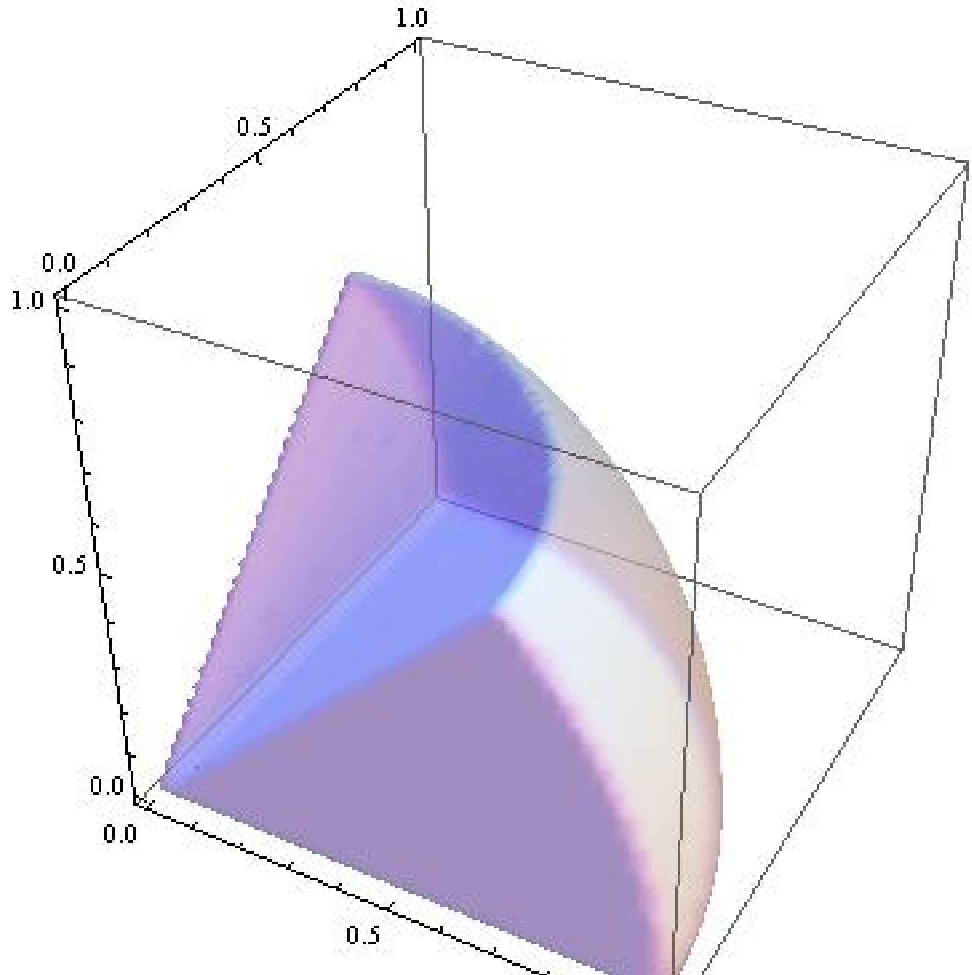

Figure 7: $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z^2 \leq x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}$