Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

Tutorato numero 12 (27 Maggio 2011)
Teoremi di Gauss-Green, divergenza, Stokes

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Verificare la validità del teorema di Gauss-Green per la forma $\omega = \left(x^2+y^2\right)dx + \left(x^2-y^2\right)dy$ sul dominio $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2, x \geq 0\right\}$.

2. Utilizzando il teorema di Gauss-Green, calcolare l'area della regione di piano racchiusa dalla curva $\gamma(t) = \left(\cos^3 t, \sin t\right)$ per $t \in [-\pi,\pi]$.

3. Sia $\omega = \dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx + \dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy$ e $\gamma_R = (R\cos t, R\sin t)$ per $t \in [-\pi,\pi]$.

   (a) Mostrare che ω è chiusa.

   (b) Calcolare $\displaystyle\int_{\gamma_R} \omega$.

   (c) Usando il teorema di Gauss-Green, mostrare che ω è esatta.

4. Sia $\omega = -\dfrac{y^3}{4x^2+y^6}dx + \dfrac{3xy^2}{4x^2+y^6}dy$, $\gamma_1(t) = \left(\dfrac{\cos t}{2}, \sqrt[3]{\sin t}\right)$ per $t \in [-\pi,\pi]$ e γ_2 la circonferenza centrata nell'origine di raggio 2 percorsa una volta in senso antiorario.

   (a) Mostrare che ω è chiusa.

   (b) Calcolare $\displaystyle\int_{\gamma_1} \omega$.

   (c) Usando il teorema di Gauss-Green, calcolare $\displaystyle\int_{\gamma_2} \omega$.

5. Verificare la validità del teorema della divergenza per il campo vettoriale $F(x,y) = (\sin(\pi x), e^y)$ sul triangolo avente per vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

6. Verificare la validità del teorema della divergenza per il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(x^2,y^2,z^2\right)$ sull'insieme $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\right\}$.

7. Verificare la validità del teorema di Stokes per la 1-forma differenziale $\omega = \dfrac{z}{x+y+z+1}dx + \dfrac{x}{x+y+z+1}dy + \dfrac{y}{x+y+z+1}dz$ sulla superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

8. Verificare la validità del teorema di Stokes per la 1-forma differenziale $\omega = xy^2dy + xz^2dz$ sulla circonferenza centrata nell'origine di raggio 1 contenuta nel piano xy.