Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni
Tutore: Luca Battaglia

Tutorato numero 2 (9 Marzo 2011)
Spazi normati

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Sia $f_n(x) = xe^{-nx} \in C([0,1])$.
   Calcolare $\|f_n\|_1$ e mostrare che $f_n \overset{n\to+\infty}{\to} 0$ rispetto a questa norma.

2. Sia $f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}} \sin x \in C([0,\pi])$.
   Mostrare che f_n converge rispetto $\|\cdot\|_1$ e calcolarne il limite.

3. Sia $x_n(k) = \dfrac{n}{n(k^2+1)+1}$.
   Mostrare che x_n converge in ℓ_1 e calcolarne il limite.

4. Sia $x_n(k) = \dfrac{1}{n^3}\cos^k\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   Calcolare $\|x_n\|_1$, $\|x_n\|_2$ e stabilire se x_n converge in ℓ_1 e/o in ℓ_2.

5. Sia $[a,b]$ un intervallo limitato:
   (a) Mostrare che esiste $C > 0$ tale che
   $$\|f\|_1 \leq C\|f\|_\infty \quad \forall f \in C([a,b])$$
   (b) Mostrare, utilizzando la successione
   $$f_n(x) = (1-nx)\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x) \in C([0,1])$$
   che le due norme non sono tuttavia equivalenti.
   (c) Mostrare, utilizzando la successione
   $$g_n(x) = \frac{1}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)\mathbf{1}_{[0,n]}(x) \in C([0,+\infty))$$
   che se l'intervallo è illimitato la disuguaglianza precedente non è vera per alcun $C > 0$.

6. Trovare le costanti ottimali A e B tali che
   $$A\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq B\|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$
   (Per costanti ottimali si intende tali che la disuguaglianza precedente non è più valida per $A' > A$ oppure $B' < B$)

7. Sia $C^k([-1,1])$ lo spazio delle funzioni derivabili k volte con derivata k-esima continua.
   (a) Mostrare che
   $$\|u\|_{C^m([-1,1])} := \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty + \cdots + \left\|u^{(m)}\right\|_\infty$$
   è una norma su $C^k([-1,1])$ $\forall m \leq k$.
   (b) Mostrare, procedendo per induzione, che $C^k([-1,1])$ è completo rispetto a $\|\cdot\|_{C^k([-1,1])}$
   (c) Mostrare, utilizzando la successione
   $$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$
   che $C^k([-1,1])$ non è completo rispetto a $\|\cdot\|_\infty$.
   (d) Mostrare, costruendo un'opportuna successione, che $C^k([-1,1])$ non è completo rispetto a $\|\cdot\|_{C^m([-1,1])}$ se $m < k$.