

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di AM220
A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni
Tutore: Luca Battaglia

TUTORATO NUMERO 3 (16 MARZO 2011)
TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
<http://www.lifedreamers.it/liuck>

1. Sia $\Phi : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ definita come:

$$(\Phi f)(x) = \int_0^1 f(t) \arctan(x^2 t^2) dt$$

Mostrare che Φ è una contrazione su $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ e determinare tutti i suoi punti fissi.

2. Sia $X = \{f \in C([0, 1]) : 0 \leq f(x) \leq 2 \forall x \in [0, 1]\}$ e $\Phi : X \rightarrow C([0, 1])$ definita come:

$$(\Phi f)(x) = 1 + \int_0^x t f(t) dt$$

- (a) Mostrare che X è un sottoinsieme chiuso di $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$.
(b) Mostrare che $\Phi(X) \subset X$ e che Φ è una contrazione.
(c) Trovare tutti i punti fissi di Φ .
3. Sia $B = \{x \in \ell_1 : \|x\|_1 \leq 1\}$ la palla unitaria chiusa di ℓ_1 e $\Phi : \ell_1 \rightarrow \ell_1$ definita come:

$$(\Phi x)(k) = e^{-\frac{k+2}{k+1}} x^2(k)$$

- (a) Mostrare che Φ è una contrazione su B .
(b) Mostrare che Φ non è una contrazione su ℓ_1 .
4. Sia $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ lo spazio delle successioni a valori reali e $\Phi_a : \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definita come:

$$(\Phi_a x)(0) = 0 \quad \text{e} \quad (\Phi_a x)(k) = \sum_{j=1}^k a^j x(j) \quad \text{se } k \geq 1$$

al variare del parametro $a \geq 0$.

- (a) Mostrare che $\Phi_a(\ell_\infty) \subset \ell_\infty \iff a < 1$
(b) Mostrare che Φ_a è una contrazione su $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty) \iff a < \frac{1}{2}$.
5. Calcolare il limite della successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} x_0 = c \\ x_n = \frac{3}{x_{n-1} + 2} \end{cases}$$

al variare di $c \geq 0$.

6. Mostrare che l'equazione $x = \log(x^2 + 3)$ ha un'unica soluzione positiva.
7. Dimostrare le seguenti disuguaglianze:

- (a) $|\sin x| \leq |x| \forall x \in \mathbb{R}$.
(b) $|1 - \cos x| \leq \frac{x^2}{2} \forall x \in \mathbb{R}$.
(c) $|\tan x| \leq 2|x|$ se $|x| \leq 1$.
(d) $|\arctan x| \leq |x| \forall x \in \mathbb{R}$.
(e) $|e^x - 1| \leq 3|x|$ se $|x| \leq 1$.
(f) $|\sinh x| \leq 3|x|$ se $|x| \leq 1$.
(g) $|\cosh(x) - 1| \leq 3|x|$ se $|x| \leq 1$.
(h) $|\log(x + 1)| \leq 2|x|$ se $|x| \leq \frac{1}{2}$.