Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni
Tutore: Luca Battaglia

TUTORATO NUMERO 5 (30 MARZO 2011)
TEOREMA DELLA FUNZIONE INVERSA, MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come
$$F(x) = e^x \cos(x) - \sqrt{x^2 + 1}$$
   (a) Provare che $\exists r, \rho$ e $g \in C^2(B_r(0), B_\rho(0))$ tale che $F(g(u)) = u \ \forall u \in B_r(0)$
   (b) Fornire una stima dei raggi r, ρ
   (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine della funzione g

2. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita come
$$F(x, y) = \left(\cosh(x) - \frac{1}{y+1}, x + \log(\cos y)\right)$$
   (a) Provare che $\exists r, \rho$ e $g \in C^2(B_r((0,0)), B_\rho((0,0)))$ tale che $F(g(u,v)) = (u,v) \ \forall u \in B_r((0,0))$
   (b) Fornire una stima dei raggi r, ρ
   (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al primo ordine della funzione g

3. Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ e $f(x, y) = xy$.
   Calcolare $\sup_A f$ e $\inf_A f$ specificando i punti in cui sono raggiunti.

4. Siano $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$ e $f(x, y, z) = xyz^2$.
   Calcolare $\sup_A f$ e $\inf_A f$ specificando i punti in cui sono raggiunti.

5. Determinare i punti della parabola $y = 2 - x^2$ che distano meno dall'origine.

6. Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge x^2\}$ e $f(x, y) = (x - 5)^2 + 2y^2$.
   Calcolare $\sup_A f$ e $\inf_A f$ specificando i punti in cui sono raggiunti.

7. Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 \le 1\}$ e $f(x, y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin(yt)dt$:
   (a) Mostrare che f è ben definita su A.
   (b) Determinare un'espressione esplicita per f.
   (c) Calcolare $\max_A f$ e $\min_A f$ specificando i punti in cui sono raggiunti.

8. Sia $y \in \mathbb{R}^n$ un vettore fissato. Calcolare
$$\max_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \langle x, y\rangle \qquad \min_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \langle x, y\rangle$$
   e dedurne la validità della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz
$$\langle x, y\rangle \le \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$