

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof.ssa S. Mataloni

Tutore: Luca Battaglia

TUTORATO NUMERO 6 (6 APRILE 2011)

MASSIMI E MINIMI VINCOLATI, RIPASSO

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:

<http://www.lifedreamers.it/liuck>

1. Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1\}$ e $f(x, y) = x(y + 1)$.
Calcolare $\sup_A f$, $\inf_A f$ specificando se si tratta di massimo e/o di minimo ed eventualmente i punti dove vengono raggiunti.
2. Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $f(x, y, z) = \frac{x + y}{z^2 + 1}$.
Calcolare $\sup_A f$, $\inf_A f$ specificando se si tratta di massimo e/o di minimo ed eventualmente i punti dove vengono raggiunti.
3. Determinare i cilindri di volume massimo tra quelli aventi superficie totale pari a 2π .
4. Calcolare, per $a, b > 0$, l'area dell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -b \leq x \leq b, 0 \leq y \leq a(b^2 - x^2)\}$ e determinarne il valore massimo per i valori di a, b tali che $a^2 + b^2 = 1$.
5. Calcolare l'area dell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 - 1 \leq y \leq \min\{x + 1, \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\}\}$.
6. Sia $x_n = \frac{\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) + 1}{k^2}$.
Stabilire se x_n converge in ℓ_2 e/o in ℓ_1 .
7. Sia $\Phi : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ definita come

$$(\Phi f)(x) = \int_0^1 \sin(x \sin(\pi t)) f(t) dt$$

Provare che Φ è una contrazione su $C([0, 1], \|\cdot\|_\infty)$

8. Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita come

$$F(x, y_1, y_2) = \left((y_2^2 + 1) e^{\arctan x} - y_1, \frac{y_2}{y_1} + \sin(x^2) \right)$$

- (a) Provare che $\exists r, \rho > 0, g \in C^2(B_r(0), B_\rho((1, 0)))$ tali che $F(x, g_1(x), g_2(x)) \equiv 0 \forall x \in B_r(0)$.
- (b) Fornire una stima dei raggi r, ρ .
- (c) Determinare lo sviluppo di Taylor al primo ordine di g .