Primo esonero AM220 15/04/2011 -A.A. 20010-2011

Prof. S. Mataloni

- **Esercizio** 1
Sia $K(s,t)$ una funzione definita nel quadrato $Q=[a,b]^2$ ed ivi continua; sia $f(s)$ una funzione continua in $[a,b]$. Determinare λ affinché l'equazione integrale
$$x(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)\,x(t)\,\mathrm{d}\,t$$
ammetta una ed una sola soluzione $x(s)$, continua in $[a,b]$.
Soluzione: Ad esempio per $0\le\lambda<\frac{1}{\|K\|_\infty(b-a)}$.

- **Esercizio** 2 Sia T un tetraedro con vertici $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0)$ e $(0,0,1)$. Calcolare $\int_T y\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$.
Soluzione: $\frac{1}{24}$.

- **Esercizio** 3 Disegnare la regione R nel primo ottante dello spazio tridimensionale che ha volume finito ed è delimitata dalle superfici $x=0$, $z=0$, $x+y=1$ e $z=y^2$. Calcolarne il volume.
Soluzione: $\frac{1}{12}$

- **Esercizio** 4 Sia
$$f(x,y,z)=\begin{cases} f_1(x,y,z)=x-y+z^2 & \text{se } x>0\\ f_2(x,y,z)=e^{x^2+y^2+z^2} & \text{se } x\le 0.\end{cases}$$
Sia $D=D_+\cup D_-$ dove
$$D_\pm=\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ \pm x\ge 0\,\}.$$
Calcolare il valore dell'estremo superiore/inferiore di f in D.
Stabilire inoltre se tale valore rappresenta il massimo/minimo assoluto di f in D indicando i punti dove venisse eventualmente assunto.
Rispondere alla domanda precedente nel caso in cui $f=f_1$ se $x\ge 0$ e $f=f_2$ se $x<0$.
Soluzione: $\inf_D f=-1$, $\max_D f=e$; nel secondo caso $\min_D f=-1$, $\max_D f=e$.

- **Esercizio** 5 Sia
$$F:(y,x)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\to F(y,x)\in\mathbb{R}^2$$
definita da
$$F(y,x)=\begin{cases} F_1(y_1,y_2,x)=\sin x+e^x\ y_1+\sin(y_1\,y_2)\\ F_2(y_1,y_2,x)=e^{y_1}\ \ln(1+x)+y_2\end{cases}$$

e sia $p_0 = (0,0,0)$. Dimostrare che vale il teorema delle funzioni implicite in $(0,0,0)$ e trovare ρ ed r che soddisfano le stime presenti nell'enunciato del teorema.

Soluzione: Esiste $g : B_r(0) \to B_\rho(0,0)$ con $\rho = \frac{2}{11}$ e $r = \frac{1}{44}$.