1 DOMINI NORMALI

1.1 Definizione

Siano $\alpha(x), \beta(x)$ due funzioni continue in un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tali che

$$\alpha(x) \leq \beta(x).$$

L'insieme del piano (figura 5.1 pag. 201)

$$D = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : \ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

si chiama dominio normale rispetto all'asse x.
Osservazione Normale vuol dire perpendicolare e nella definizione precedente le rette di equazione $x = a$ ed $x = b$ sono perpendicolari all'asse delle x da cui il nome dominio normale rispetto all'asse x.
In riferimento alla figura 5.1 di pag. 201 ricordiamo che

$$\int_a^b \alpha(x)\, dx$$

indica l'area della regione di piano "grigia" racchiusa dall'asse delle x dalle rette di equazione $x = a$ e $x = b$ e dalla funzione $\alpha(x)$ mentre

$$\int_a^b \beta(x)\, dx$$

indica l'area della parte di piano "bianca piu' quella grigia" precedentemente descritta. Da cui, per trovare l'area (misura) del dominio D basta fare

$$m(D) = \int_a^b \beta(x)\, dx - \int_a^b \alpha(x)\, dx \tag{1.1}$$

ossia l'area della parte "bianca" è uguale all'area della parte "bianca piu' grigia" meno l'area della parte "grigia". Il simbolo $m(D)$ ricorda che stiamo calcolando la misura del dominio D. Analogamente diamo la seguente definizione

1.2 Definizione

Siano $\gamma(y), \delta(y)$ due funzioni continue in un intervallo $[c,d] \subset \mathbb{R}$ tali che

$$\gamma(y) \leq \delta(y).$$

L'insieme del piano (figura 5.2)

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [c,d] : \ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$$

si chiama dominio normale rispetto all'asse y e la sua area si ottiene da

$$m(E) = \int_c^d \delta(y) - \gamma(y)\, dy \tag{1.2}$$

Esercizio 1 (2.54 pag. 108 Libro Esercizi)
Calcolare l'area della regione piana

$$D = \left\{(x,y) \in [0,\pi] \times \mathbb{R} : \ \cos x \leq y \leq \cos \frac{x}{2}\right\}.$$

Si osservi che l'insieme è normale rispetto all'asse x (anche senza il disegno basta notare che la variabile x varia tra due numeri e la variabile y tra due funzioni della x come descritto nella Definizione 1.1. Applicando la (1.1) si ottiene

$$m(D) = \int_0^\pi \cos \frac{x}{2}\, dx - \int_0^\pi \cos x\, dx = 2\int_0^\pi \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}\, dx - \int_0^\pi \cos x\, dx =$$
$$\left[2 \sin \frac{x}{2} - \sin x\right]_0^\pi = 2 \sin \frac{\pi}{2} - \sin \pi - 2 \sin 0 + \sin 0 = 2$$

Esercizio 2 (2.55 Libro Esercizi)
Calcolare l'area della regione piana

$$D = \left\{(x,y) \in [0, \frac{\pi}{4}] \times \mathbb{R} : \ \sin x \leq y \leq \cos x\right\}.$$

Dalla (1.1)

$$m(D) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\, dx = [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$
$$\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} - \sin 0 - \cos 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1.$$

Esercizio 3 (2.56 Libro Esercizi)
Calcolare l'area della regione piana

$$D = \left\{(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R} : \ x^2 \leq y \leq x^4\right\}.$$

Esercizio 4 (Esempio 1 pag. 202)
Calcolare l'area della regione piana

$$D = \left\{(x, y) \in [0,1] \times \mathbb{R} : \ x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\right\}.$$

Si osservi nella figura (5.4) che il dominio *è* normale rispetto ad entrambi gli assi (perch*é* un punto si pu*ò* pensare perpendicolare ad entrambi gli assi). Per ottenere il risultato possiamo procedere in due modi.
Applicando la (1.1)

$$m(D) = \int_0^1 \sqrt{x} - x^3 \, dx$$

oppure scrivendo D come dominio normale rispetto all'asse y. Per farlo occorre esplicitare la variabile x in funzione della y ossia:

$$y = x^3 \iff y^{\frac{1}{3}} = x$$

e

$$y = \sqrt{x} \iff y^2 = x$$

da cui

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times [0,1] : \ y^2 \leq x \leq y^{\frac{1}{3}}\right\}.$$

e applicando la (1.2) calcolare

$$m(D) = \int_0^1 y^{\frac{1}{3}} - y^2 \, dy.$$

In questi casi non *è* necessario usare entrambi i metodi ma conviene scegliere l'integrale pi*ù* facile da calcolare.

2 INTEGRALI DOPPI

Sia ora D un dominio normale del piano e $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili continua. Analogamente a quanto fatto per le funzioni di una variabile *è* possibile definire le somme integrali per eccesso e per difetto partendo da una partizione del dominio D e giungere cos*ì* alla definizione rigorosa di integrale doppio di $f(x, y)$ esteso a D che si indica con il simbolo

$$\int\int_D f(x, y) \, dxdy.$$

(Leggere pagg. 204 e 205). Vediamo il significato geometrico di tale integrale nel caso di $f(x,y) > 0$. L'integrale fornisce il valore del volume del solido della regione di spazio avente per base D per tetto $f(x,y)$ e come superficie laterale quella formata dalla infinite rette parallele all'asse z che congiungono il bordo di D con i punti che giacciono su $f(x,y)$.

2.1 FORMULE DI RIDUZIONE PER GLI INTEGRALI DOPPI

Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato e sia D il dominio normale rispetto all'asse x definito dalle limitazioni

$$D = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} : \ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

con $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ continue in $[a,b]$.
Allora per ogni $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua vale la formula

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\right] dx \tag{2.3}$$

Sia $[c,d]$ un intervallo chiuso e limitato e sia E il dominio normale rispetto all'asse y definito dalle limitazioni

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [c,d] : \ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$$

con $\gamma(y)$ e $\delta(y)$ continue in $[c,d]$.
Allora per ogni $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua vale la formula

$$\int\int_E f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left[\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx\right] dy \tag{2.4}$$

Esempio (Esempio 1 pag. 213)
Calcolare

$$\int\int_D y\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

dove $D = \{(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R} : \ 0 \leq y \leq x\}$.
Essendo il dominio normale rispetto all'asse x applico la formula di riduzione (2.3) e ottengo

$$\int_0^1 \int_0^x y\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx.$$

Calcoliamo per prima cosa l'integrale della variabile y:

$$\int_0^x y\sqrt{x^2+y^2}\,dy.$$

Essendo $\frac{d}{dy}(x^2+y^2)=2y$ si ha

$$\frac{1}{2}\int_0^x 2y\sqrt{x^2+y^2}\,dy = \left[\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}\right]_0^x = \frac{(x^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{(x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2^{\frac{3}{2}}x^3-x^3}{3} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}x^3$$

Dobbiamo ora risolvere

$$\int_0^1 \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\right)x^3\,dx = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}\int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{12}$$

Esercizio 5
Calcolare

$$\int\int_D x\cos y\,dx\,dy$$

dove $D=\left\{(x,y)\in[\sqrt{1-\frac{\pi}{4}},1]\times\mathbb{R}:\ 0\le y\le 1-x^2\right\}$.
Dobbiamo calcolare

$$\int_{\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}}^1\int_0^{1-x^2} x\cos y\,dy\,dx.$$

Calcoliamo prima

$$\int_0^{1-x^2} x\cos y\,dy = x\int_0^{1-x^2}\cos y\,dy = x\,[\sin y]_0^{1-x^2} = x\sin(1-x^2)-x\sin 0 = x\sin(1-x^2)$$

dove abbiamo portato x fuori dall'integrale perché costante rispetto a y, variabile d'integrazione. Ora occorre calcolare

$$\int_{\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}}^1 x\sin(1-x^2)\,dx = -\frac{1}{2}\int_{\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}}^1 -2x\sin(1-x^2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos(1-x^2)\right]_{\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}}^1 = \frac{1}{2}\cos 0 - \frac{1}{2}\cos(1-1+\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Esercizio 6
Calcolare

$$\int\int_D \frac{x^2}{1+xy}\,dx\,dy$$

dove $D=\{0\le x\le 1;\ 0\le y\le x\}$.
Dobbiamo calcolare

$$\int_0^1\left[\int_0^x \frac{x^2}{1+xy}\,dy\right]dx.$$

Calcoliamo prima

$$\int_0^x \frac{x^2}{1+xy}\,dy.$$

Osserviamo che l'integrale è nella variabile y e a denominatore abbiamo $1+xy$ la cui derivata rispetto a y vale x. A numeratore abbiamo x^2, per questo conviene tenere una x dentro il simbolo d'integrale ed una portarla fuori. Risulta

$$\int_0^x \frac{x^2}{1+xy}\,dy = x\int_0^x \frac{x}{1+xy}\,dy = [x\log(1+xy)]_0^x =$$

$$x\log(1+x^2) - x\log 1 = x\log(1+x^2)$$

da cui

$$\int\int_D \frac{x^2}{1+xy}\,dx\,dy = \int_0^1 x\log(1+x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x\log(1+x^2)\,dx.$$

Poniamo ora $t = 1+x^2$ da cui $dt = 2xdx$ e

$$\int 2x\log(1+x^2)\,dx = \int t\log t$$

che si risolve per parti dando luogo a

$$\int t\log t = \frac{t^2}{2}\log t - \int\frac{t}{2} = \frac{t^2}{2}\log t - \frac{t^2}{4}.$$

Ne risulta

$$\int\int_D \frac{x^2}{1+xy}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 2x\log(1+x^2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(1+x^2)^2}{2}\log(1+x^2) - \frac{(1+x^2)^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(2\log 2 - 1) - \frac{1}{2}(-\frac{1}{4}) = \log 2 - \frac{3}{8}$$

Esercizio 7
Calcolare

$$\int\int_D \frac{x}{1+y}\,dxdy$$

dove $E = \left\{y \le x \le \sqrt{y};\ 0 \le y \le 1\right\}$.
Essendo il dominio normale rispetto all'asse y applichiamo la formula di riduzione (2.4) ed otteniamo

$$\int\int_D \frac{x}{1+y}\,dxdy = \int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt{y}} \frac{x}{1+y}\,dx\right]dy.$$

Calcoliamo prima l'integrale dentro le parentesi quadre:

$$\int_y^{\sqrt{y}} \frac{x}{1+y}\,dx = \frac{1}{1+y}\int_y^{\sqrt{y}} x\,dx = \frac{1}{2(1+y)}\left[x^2\right]_y^{\sqrt{y}} = -\frac{y^2-y}{2(1+y)}$$

da cui risulta che

$$\int\int_D \frac{x}{1+y}\,dxdy = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y^2-y}{1+y}\,dy == -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(y-2+\frac{2}{1+y}\right)\,dy$$

per l'ultimo passaggio si *è* utilizzata la divisione fra polinomi (si controlli la validit*à* del passaggio dando il minimo comune multiplo). Quindi risulta

$$\int\int_D \frac{x}{1+y}\,dxdy = -\frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2}-2y+2\log(1+y)\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-2+2\log 2\right) = \frac{3}{4}-\log 2$$