SERIE A TERMINI POSITIVI

Esercizio 1
Studiare il carattere delle seguenti serie a termini positivi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3} \tag{0.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \tag{0.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+2)} \tag{0.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \tag{0.4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(1+n)} \tag{0.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}} \tag{0.6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n} \tag{0.7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} \tag{0.8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!} \tag{0.9}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Esercizio 2
Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -y + e^{-x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3
Risolvere, separando le variabili, la seguente equazione differenziale:

$$2x^2yy' = 1 + y^2$$

Esercizio 4
Verificare che la funzione

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

é soluzione dell'equazione

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Esercizio 5
Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni di due variabili:

$$a) f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}\log(x-y)$$

$$b) f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}\log(y + \frac{x^2}{2} - 2)$$

Esercizio 6
Determinare eventuali punti di massimo e minimo delle seguenti funzioni:

$$f(x,y) = x - x^2 - y^2 \tag{0.10}$$

$$f(x,y) = xy(x-1) \tag{0.11}$$

$$f(x,y) = x^3 + x - 4xy - 2y^2 \tag{0.12}$$

Esercizio 7
Determinare l'equazione del piano tangente ai grafici delle funzioni dell'esercizio precedente nel punto di coordinate $(-1, 1)$.

CURVE PIANE

Esercizio 8
Dire se la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

$t \in [0, 2\pi]$ é aperta o chiusa.

Esercizio 9

Calcolare la lunghezza della curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

$t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Esercizio 10

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$

$t \in [0, 1]$

Esercizio 11
Si calcolino i seguenti integrali curvilinei:

$$i) \int_\gamma \sqrt{1 + x^2 + 3y}\, ds$$

dove γ é la curva piana $y = x^2$ con $0 \leq x \leq 1$.

$$ii) \int_\gamma \left(x^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) ds$$

dove γ é la curva piana $y = \log x$ con $1 \leq x \leq e$.

FORME DIFFERENZIALI

Esercizio 12
Calcolare l'integrale delle seguenti forme differenziali

$$a)\omega(x, y) = x^2 \ dx + xy \ dy$$

lungo la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}$$

$t \in [-1, 1]$

$$b)\omega(x, y) = xy \ dx + (y^2 + 1) \ dy$$

lungo ciascuna delle seguenti curve:
a) segmento di retta di estremi $(0,0)$ e $(1,1)$
b) arco di parabola $x = y^2$ di estremi $(0,0)$ e $(1,1)$.

Esercizio 13
La forma differenziale

$$\omega(x,y) = x \sin \pi y \ dx + x\sqrt{1+y} \ dy$$

é esatta nel suo insieme di definizione?

Esercizio 14
Stabilire se le seguente forma differenziale

$$\omega(x,y) = 2xe^{x^2} \sin y \ dx + e^{x^2} \cos y \ dy$$

é esatta in $\mathbb{R}^2$ e in caso affermativo calcolarne la primitiva.

Esercizio 15
Stabilire se le seguente forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \ dx + \frac{1}{y} \ dy$$

é esatta in $\{(x,y) : x > 0; y > 0\}$ e in caso affermativo calcolarne la primitiva.

INTEGRALI DOPPI

Esercizio 16
Calcolare i seguenti integrali

$$a) \int\int_T e^{y^2} \ dxdy$$

dove $T := \{0 \leq x \leq 2y; 0 \leq y \leq 1\}$.

$$b) \int\int_A x \cos y \ dxdy$$

dove $T := \left\{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x^2\right\}$.

$$c) \int\int_X (2x^2 + y) \ dxdy$$

dove $X := \left\{-1 \leq x \leq 1; x^2 \leq y \leq 1\right\}$.