## Matematica - Roma Tre
# GE4 - Geometria Differenziale 1
ESERCIZI SULLE CURVE - ALVIN (02-10-09)

1. *La derivata di un vettore di modulo costante è sempre perpendicolare al vettore stesso.* Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva liscia. Mostrare che $|\alpha(t)|$ è una costante non nulla (i.e. $\alpha$ giace su una sfera) se e solo se $\alpha(t)$ è ortogonale ad $\dot{\alpha}(t)$ $\forall t \in I$.

2. Sia $v = (a, b, c)$ un vettore fissato e sia $I \to \mathbb{R}^3$ una curva liscia, dove $I = [0, 1]$. Usare il Primo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale per dimostrare che

$$\int_0^1 v \cdot \dot{\alpha}(t)dt = v \cdot (\alpha(1) - \alpha(0))$$

3. *Una curva liscia non-regolare.* Mostrare che l'insieme $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = |x|\}$
   (a) è la traccia di una curva regolare a tratti non liscia.
   (b) è la traccia di una curva liscia. (Ispirarsi al # 10 p.24)
   (c) non può essere la traccia di una curva regolare.

4. (Do Carmo, p.10 es.8) *La lunghezza di una curva è il limite delle lunghezze delle poligonali inscritte.*

5. (Do Carmo, p.7 es.3) *Cissoide di Diocle.*

6. (Do Carmo, p.7 es.4) Sia $\alpha : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\alpha(t) = \left(\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2}\right)$$

   dove $t$ è l'angolo che l'asse $y$ forma con il vettore $\dot{\alpha}(t)$. La traccia di $\alpha$ è detta *Trattrice.* Mostrare che:
   (a) $\alpha$ è una curva differenziabile, regolare ovunque tranne che in $t = \pi/2$
   (b) La lunghezza del segmento sulla tangente alla trattrice tra il punto di tangenza e l'asse $y$ è identicamente uguale a 1.

7. *Una curva infinita di lunghezza finita.* (Do Carmo, p.8 es.6) Sia $\alpha(t) = (ae^{bt} \cos t, ae^{bt} \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, $b < 0$ costanti, una curva parametrizzata. Mostrare che:
   (a) Al tendere di $t \to \infty$, la curva $\alpha(t)$ si avvicina all'origine seguendo una spirale (per questo la traccia di $\alpha$ è detta *spirale logaritmica*).
   (b) Al tendere di $t \to \infty$ si ha $\dot{\alpha}(t) \to (0, 0)$, e inoltre $\alpha$ ha lunghezza finita in $[t_0, \infty)$, i.e.

$$\lim_{t \to \infty} \int_{t_0}^{t} |\dot{\alpha}(t)|dt < \infty$$

8. Sia $k$ il vettore $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ e sia $\alpha(t) : I \to \mathbb{R}^3$ una curva liscia. Dimostrare che $\alpha(t)$ è contenuta in un piano affine orizzontale $\pi$ (cioè $z = z_0$) se e solo se il prodotto scalare $\alpha \cdot k$ è costante (cioè non dipende da $t$).

Girare, prego →

9. Nello spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$ con base ortonormale $\{i, j, k\}$ il prodotto vettoriale $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è definito estendendo per bilinearità le seguenti relazione "quaternioniche":

$$i \wedge i = j \wedge j = k \wedge k = 0$$

$$i \wedge j = -j \wedge i = k, \qquad j \wedge k = -k \wedge j = i, \qquad k \wedge i = -i \wedge k = j$$

Il *prodotto misto* $(u \wedge v) \cdot w$ di tre vettori $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ è il numero reale che si ottiene facendo il prodotto scalare del terzo con il prodotto vettoriale dei primi due. Mostrare che

(a) $(u \wedge v) \cdot w$ è uguale al determinante della matrice $3 \times 3$ delle coordinate dei tre vettori $u, v, w$.

(b) $(u \wedge v) \cdot w$ è uguale al volume con segno del parallelepipedo generato dai tre vettori $u, v, w$. Fornire un'interpretazione geometrica di questo segno.

10. Dimostrare che il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ non è associativo.

11. *Regola di Leibniz.* Siano

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t)), \qquad \text{e} \qquad w(t) = (w_1(t), w_2(t), w_3(t)),$$

due campi vettoriali lisci $u, w : I \to \mathbb{R}^3$. Dimostrare che $u \cdot w : I \to \mathbb{R}$ è una funzione liscia e che $u \wedge w : I \to \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale liscio. Mostrare inoltre che vale la regola di Leibniz:

$$\frac{d}{dt}(u(t) \cdot w(t)) = \dot{u}(t) \cdot w(t) + u(t) \cdot \dot{w}(t),$$
$$\frac{d}{dt}(u(t) \wedge w(t)) = \dot{u}(t) \wedge w(t) + u(t) \wedge \dot{w}(t).$$

12. Dire quali tra le seguenti basi sono positivamente orientate.

(a) La base $\{(1, 3), (4, 2)\}$ in $\mathbb{R}^2$.

(b) La base $\{(1, 3, 5), (2, 3, 7), (4, 8, 3)\}$ in $\mathbb{R}^3$.

13. (Do Carmo, p. 25 es. 12) *Formule molto utili per calcolare curvatura e torsione senza ascissa curvilinea.*

14. (Do Carmo, p. 24 es. 10) *Esempio di curva regolare, NON-biregolare con torsione nulla ma che non è piana.*

15. *Sul teorema fondamentale della geometria locale delle curve.*

(a) Dimostrare che la circonferenza $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$ di centro l'origine e raggio $R$ ha curvatura costante $k = \pm\frac{1}{R}$ dove il segno dipende dal verso di percorrenza.

(b) Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare parametrizzata, con curvatura $k(t) = k_0 \in \mathbb{R}$ costante assegnata. Cosa si può dire su $\alpha(t)$?

16. Determinare l'ascissa curvilinea delle seguenti curve:

(a) L'elica cilindrica di raggio $a$ e passo $b$.

(b) La cardioide i.e. la curva parametrizzata $\mathcal{C} = \{(\cos t(1 - \cos t), \sin t(1 - \cos t)) \in \mathbb{R}^2 \,:\, t \in (0, 2\pi)\}$

(c) la cicloide, i.e. la curva parametrizzata $\mathcal{C}_1 = \{(t - \sin t, 1 - \cos t) \in \mathbb{R}^2 \,:\, t \in (0, 2\pi)\}$

(d) l'astroide $\mathcal{C}_2 = \left\{\left(\cos^2 t, \sin^2 t, \cos \frac{t}{2}\right) \in \mathbb{R}^3 \,:\, t \in (0, 2\pi)\right\}$

17. (Do Carmo, p.23 es.6) *I Movimenti Rigidi dello spazio Euclideo preservano la curvatura e la torsione delle curve.*