

Esercizi su Curvature Normali - (20-11-09)

GE4 - Geometria Differenziale
Dip. Matematica - Università Roma Tre

Prof. M. Pontecorvo

Compito - 21 dicembre 2005

Istruzioni. Scrivere nome, cognome, numero di matricola e firma su ogni foglio che si intende consegnare. Scrivere solamente sui fogli forniti. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici. **NON PARLARE** pena il ritiro del compito.

Punteggio totale 100 punti.

Considerando il sottinsieme dello spazio Euclideo

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 5xy\}$$

rispondere alle seguenti domande giustificando le risposte.

1. **(10 punti).** Dopo aver mostrato che Σ è una superficie liscia che contiene l'origine $O \in \mathbb{R}^3$, fissare un versore normale N a Σ in O .
2. **(10 punti).** Considerando il fascio dei piani normali a Σ in O , mostrare che le sezioni normali per O sono tutte e sole le curve

$$\gamma_m(t) = (t, mt, 5mt^2) \quad \text{al variare di } m \in \mathbb{R}, \text{ più la curva}$$

$$\gamma_\infty(t) = (0, t, 0)$$

Girare, prego \rightarrow

3. **(10 punti)**. Dopo aver calcolato velocità $\dot{\gamma}_m(0)$ e accelerazione $\ddot{\gamma}_m(0)$, mostrare che (in questo caso) il versore normale alla curva $\gamma_m(t)$ in O è $n = \frac{\ddot{\gamma}_m(0)}{|\ddot{\gamma}_m(0)|}$

4. **(10 punti)**. Calcolare le curvatures normali a Σ in O usando l'espressione

$$k_n(m) = k(m)\langle n, N \rangle$$

dove $k(m) = \frac{|\dot{\gamma}(0) \wedge \ddot{\gamma}(0)|}{|\dot{\gamma}(0)|^3}$ è la curvatura di γ_m nell'origine $O \in \mathbb{R}^3$.

Mostrare che $k_n(m)$ è una funzione liscia di m .

5. **(10 punti)**. Disegnare un grafico qualitativo della funzione $k_n(m)$ al variare di $m \in \mathbb{R}$.

6. **(15 punti)**. Calcolare le direzioni principali e le direzioni asintotiche di Σ in O trovando gli estremi della funzione $k_n(m)$ e i suoi zeri per $m \in \mathbb{R} \cup \infty$.

7. **(10 punti)**. Calcolare curvatures principali e curvatura di Gauss di Σ in O usando il punto precedente.

8. **(15 punti)**. Verificare che le direzioni asintotiche in O corrispondono a 2 rette interamente contenute in Σ .

Esiste un'altra retta (o segmento) passante per O e contenuta in Σ ?

9. **(10 punti)**. Scrivere equazioni delle linee di curvatura della superficie nell'origine e mostrare che esse giacciono da parti opposte del piano tangente.