

1. Studiare la derivabilità della funzione $f(x) = \arcsin \sqrt{2x-5} - \frac{1}{2} \arcsin(4x-11) - \frac{\pi}{4}$ e dedurne il grafico.

Il dominio della funzione si determina dalle seguenti condizioni

$$\begin{cases} 0 \leq 2x-5 \leq 1 \\ -1 \leq 4x-11 \leq 1 \end{cases},$$

da cui si ottiene $D_f = \left[\frac{5}{2}, 3 \right]$. La funzione è continua in D_f . Inoltre si ha $D_{f'} \supseteq \left(\frac{5}{2}, 3 \right)$, con $\frac{5}{2}$ e 3 punti critici per la derivabilità (rispettivamente destra e sinistra). Studiamo la derivabilità agli estremi del dominio.

$\forall x \in \left(\frac{5}{2}, 3 \right)$, si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x-5)}} \frac{2}{2\sqrt{2x-5}} - \frac{1}{2} \frac{4}{\sqrt{1-(4x-11)^2}} = \frac{1}{\sqrt{-4x^2+22x-30}} - \frac{1}{\sqrt{-4x^2+22x-30}} = 0,$$

da cui $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{5}{2} \right)^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = 0$.

Allora $D_{f'} = D_f$ e, $\forall x \in \left[\frac{5}{2}, 3 \right]$, risulta $f'(x) = 0$. La funzione è allora costante in $\left[\frac{5}{2}, 3 \right]$ e, in particolare

identicamente nulla nell'intervallo $D_f = \left[\frac{5}{2}, 3 \right]$ essendo $f(3) = \arcsin 1 - \frac{1}{2} \arcsin 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$.

2. Verificare che vale la relazione $e^{-2n-\sqrt{n}} = o\left(\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}\right)$ per $n \rightarrow +\infty$.

Si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2n-\sqrt{n}}}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2n-\sqrt{n}}}{e^{n^2 \ln\left(1-\frac{2}{n}\right)}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n-\sqrt{n}-n^2 \ln\left(1-\frac{2}{n}\right)} = (*)$$

Dalla seguente formula di MacLaurin del secondo ordine

$$\ln(1+k) = k - \frac{k^2}{2} + o[k^2] \quad \text{per } k \rightarrow 0,$$

ponendo $k = -\frac{2}{n}$, si ha

$$\ln\left(1-\frac{2}{n}\right) = -\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left[\frac{1}{n^2}\right] \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Sostituendo si ottiene

$$(*) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n-\sqrt{n}-n^2\left(-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}+o\left[\frac{1}{n^2}\right]\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n-\sqrt{n}+2n+2+o[1]} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{n}+2+o[1]} = 0,$$

quindi la relazione è verificata.

3. Calcolare, al variare del parametro reale λ , $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x^3) - \lambda x}{x^7}$.

Si ha

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o[t^2] \quad \text{per } t \rightarrow 0,$$

e quindi, ponendo $t = x^3$

$$\cos(x^3) = 1 - \frac{x^6}{2} + o[x^6] \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x^3) - \lambda x}{x^7} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\lambda) - \frac{x^6}{2} + o[x^6]}{x^6} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{se } \lambda = 1 \\ +\infty & \text{se } \lambda < 1 \\ -\infty & \text{se } \lambda > 1 \end{cases}.$$

4. Determinare, in \mathbf{R} , la funzione $F(x)$ tale che $\begin{cases} F'(x) = f(x) \\ F(1) = 0 \end{cases}$, dove $f(x) = \begin{cases} \arctan x + e^{-x} & x \geq 0 \\ x+1 & x \leq 0 \end{cases}$.

Poniamo

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

Se $x \leq 0$, allora

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^0 (\arctan t + e^{-t}) dt + \int_0^x (t+1) dt = \left(t \arctan t - \ln \sqrt{1+t^2} - e^{-t} \right) \Big|_1^0 + \left(\frac{t^2}{2} + t \right) \Big|_0^x = \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2} + e^{-1} - 1 \end{aligned}$$

mentre, se $x \geq 0$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x (\arctan t + e^{-t}) dt = \left(t \arctan t - \ln \sqrt{1+t^2} - e^{-t} \right) \Big|_1^x \\ &= x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2} - e^{-x} - \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2} + e^{-1} \end{aligned}$$

Si ha

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x - \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2} + e^{-1} - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2} - e^{-x} - \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2} + e^{-1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

1. Studiare la derivabilità della funzione $f(x) = \arcsin \sqrt{x-1} - \frac{1}{2} \arcsin(2x-3) - \frac{\pi}{4}$ e dedurne il grafico.

Il dominio della funzione si determina dalle seguenti condizioni

$$\begin{cases} 0 \leq x-1 \leq 1 \\ -1 \leq 2x-3 \leq 1 \end{cases},$$

da cui si ottiene $D_f = [1, 2]$. La funzione è continua in D_f . Inoltre si ha $D_{f'} \supseteq (1, 2)$ con 1 e 2 punti critici per la derivabilità (rispettivamente destra e sinistra). Studiamo la derivabilità agli estremi del dominio.

$\forall x \in (1, 2)$, si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)}} \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{-4x^2+12x-8}} - \frac{1}{\sqrt{-4x^2+12x-8}} = 0,$$

da cui $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = 0$.

Allora $D_{f'} = D_f$ e, $\forall x \in [1, 2]$, risulta $f'(x) = 0$. La funzione è allora costante in $[1, 2]$ e, in particolare identicamente nulla nell'intervallo $D_f = [1, 2]$ essendo $f(1) = \arcsin 0 - \frac{1}{2} \arcsin(-1) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$.

2. Verificare che vale la relazione $e^{-3n^2-\sqrt{n}} = o\left[\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n^3}\right]$ per $n \rightarrow +\infty$.

Si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-3n^2-\sqrt{n}}}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n^3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-3n^2-\sqrt{n}}}{e^{n^3 \ln\left(1-\frac{3}{n}\right)}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-3n^2-\sqrt{n}-n^3 \ln\left(1-\frac{3}{n}\right)} = (*)$$

Dalla seguente formula di MacLaurin del terzo ordine

$$\ln(1+k) = k - \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3} + o[k^3] \quad \text{per } k \rightarrow 0,$$

ponendo $k = -\frac{3}{n}$, si ha

$$\ln\left(1-\frac{3}{n}\right) = -\frac{3}{n} - \frac{9}{2n^2} - \frac{9}{n^3} + o\left[\frac{1}{n^3}\right] \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Sostituendo si ottiene

$$(*) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-3n^2-\sqrt{n}-n^3\left(-\frac{3}{n}-\frac{9}{2n^2}-\frac{9}{n^3}+o\left[\frac{1}{n^3}\right]\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-3n^2-\sqrt{n}+3n^2+\frac{9}{2}n+9+o[1]} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{9}{2}n-\sqrt{n}+9+o[1]} = +\infty,$$

quindi la relazione non è verificata.

3. Calcolare, al variare del parametro reale λ , $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x^3) - e^{x^3} + \lambda x^3}{x^6}$.

Si ha

$$\begin{aligned}\cos t &= 1 - \frac{t^2}{2} + o[t^2] \quad \text{per } t \rightarrow 0, \\ e^t &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + o[t^2] \quad \text{per } t \rightarrow 0\end{aligned}$$

e quindi, ponendo $t = x^3$

$$\begin{aligned}\cos(x^3) &= 1 - \frac{x^6}{2} + o[x^6] \quad \text{per } x \rightarrow 0, \\ e^{x^3} &= 1 + x^3 + \frac{x^6}{2} + o[x^6] \quad \text{per } x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x^3) - e^{x^3} + \lambda x^3}{x^6} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\lambda - 1) - x^3 + o[x^3]}{x^3} = \begin{cases} -1 & \text{se } \lambda = 1 \\ +\infty & \text{se } \lambda > 1 \\ -\infty & \text{se } \lambda < 1 \end{cases}$$

4. Determinare, in \mathbf{R} , la funzione $F(x)$ tale che $\begin{cases} F'(x) = f(x) \\ F(1) = 0 \end{cases}$, dove $f(x) = \begin{cases} \arctan x + e^{-x} & x \leq 0 \\ x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$.

Poniamo

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

Se $x \leq 0$, allora

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_1^0 (t+1) dt + \int_0^x (\arctan t + e^{-t}) dt = \left(\frac{t^2}{2} + t \right) \Big|_1^0 + \left(t \arctan t - \ln \sqrt{1+t^2} - e^{-t} \right) \Big|_0^x = \\ &= -\frac{1}{2} - 1 + x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2} - e^{-x} + 1\end{aligned}$$

mentre, se $x \geq 0$

$$F(x) = \int_1^x (t+1) dt = \left(\frac{t^2}{2} + t \right) \Big|_1^x = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$$

Si ha

$$F(x) = \begin{cases} x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2} - e^{-x} - \frac{1}{2} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$