1. Verificare l'invertibilità della funzione $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2+x}{x-1} & \text{se } x<1 \\ x^3 & \text{se } x\geq 1\end{cases}$. Calcolare $\dfrac{df^{-1}}{dy}(27)$.

Si ha $D_f=\mathbb{R}$. L'insieme di continuità è $D_f-\{1\}$ (f è continua solo a destra di 1); risulta

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+x}{x-1}=1,\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2+x}{x-1}=-\infty,\ f(1)=1\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty.$$

La funzione è derivabile in $D_f-\{1\}$ e $\forall x\neq 1$ si ha

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{(x-1)^2} & \text{se } x<1 \\ 3x^2 & \text{se } x>1\end{cases},$$

da cui $f'(x)<0$ in $(-\infty,1)$ e quindi ivi decrescente e $f'(x)>0$ in $(1,+\infty)$ e quindi crescente in $[1,+\infty)$. Dal grafico allora si deduce l'iniettività e, quindi, l'invertibilità della funzione.
Sempre dal grafico a dal teorema sulla derivabilità della funzione inversa si ottiene

$$\frac{df^{-1}}{dy}(27)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{3x_0^2}$$

dove x_0 è tale che $f(x_0)=x_0^3=27 \Rightarrow x_0=3$ e quindi

$$\frac{df^{-1}}{dy}(27)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{27}.$$

2. Determinare la primitiva della funzione $g(t)=e^{|t+1|}$ che si annulla nell'origine.
Si ha

$$g(t)=\begin{cases}e^{t+1} & \text{se } t\geq -1 \\ e^{-t-1} & \text{se } t<-1\end{cases}.$$

Quindi se $x\geq -1$ si ha

$$G(t)=\int_0^x e^{t+1}dt=e^{x+1}-e$$

mentre, se $x<-1$ si ha

$$G(t)=\int_0^{-1} e^{t+1}dt+\int_{-1}^x e^{-t-1}dt=2-e-e^{-x-1}.$$

Allora si ottiene

$$G(t)=\begin{cases}-e+e^{x+1} & \text{se } x\geq -1 \\ 2-e-e^{-x-1} & \text{se } x<-1\end{cases}$$

3. Calcolare il polinomio di MacLaurin di grado 5 della funzione $f(x) = 2x(\cos x - 3\sin x)$ e ricavare $f^{(5)}(0)$.

Si ha

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left[x^4\right] \qquad \text{per} \quad x \to 0\,,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left[x^5\right] \qquad \text{per} \quad x \to 0\,,$$

da cui

$$f(x) = 2x - 6x^2 - x^3 + 3x^4 + \frac{1}{12}x^5 + o\left[x^5\right] \qquad \text{per} \quad x \to 0\,.$$

Quindi

$$P_5(x) = 2x - 6x^2 - x^3 + x^4 + \frac{1}{12}x^5$$

e

$$\frac{f^{(5)}(0)}{120} = \frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad f^{(5)}(0) = 10\,.$$

4. Sia $w = \dfrac{z+1-i}{z+i}$. Determinare, individuandoli sul piano di Gauss, i numeri complessi z tali che w sia, in particolare, un numero reale.

Posto $z = x + iy$, si ha

$$w = \frac{x+1+i(y-1)}{x+i(y+1)} = \frac{\left[x+1+i(y-1)\right]\left[x-i(y+1)\right]}{x^2+(y+1)^2}$$

$$= \frac{\left(x^2+y^2+x-1\right)+i\left(-2x-y-1\right)}{x^2+(y+1)^2}\,.$$

Quindi w risulta un numero reale se

$$-2x - y - 1 = 0\,,$$

cioè in tutti i punti del piano complesso che giacciono sulla retta di equazione $y = -2x - 1$.