1. Determinare il dominio della funzione $f(x)=\left(\frac{|2x-1|-|x|}{x-2}\right)^x$.

Le condizioni da imporre sono $x\neq 2$ *e* $\frac{|2x-1|-|x|}{x-2}>0$. *Si ha*

$$\frac{|2x-1|-|x|}{x-2}=\begin{cases}\frac{1-x}{x-2} & \text{se } x<0\\ \frac{1-3x}{x-2} & \text{se } 0\le x<\frac{1}{2}\\ \frac{x-1}{x-2} & \text{se } x\ge\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Allora, per $x<0$ *la funzione* $\frac{1-x}{x-2}$ *non risulta mai positiva*; *per* $0\le x<\frac{1}{2}$ *la funzione* $\frac{1-3x}{x-2}$ *risulta positiva in* $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$; *per* $x\ge\frac{1}{2}$ *la funzione* $\frac{x-1}{x-2}$ *risulta positiva in* $(2,+\infty)$. *Quindi si ha* $D=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$.

2. Studiare la derivabilità nell'origine della funzione $f(x)=(\arctan x)\sqrt[3]{x^3+x}$.

Si ha $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\arctan h)\sqrt[3]{h^3+h}}{h}=\frac{0}{0}$. *Utilizzando la regola di de l'Hospital si ottiene*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^3+h}}{1+h^2}+\frac{(\arctan h)(3h^2+1)}{3\sqrt[3]{h^3+h}}=\frac{1}{3}\lim_{h\to 0}\frac{(\arctan h)}{\sqrt[3]{h^3+h}}=\frac{0}{0}.$$

Utilizzando ancora la regola di de l'Hospital si ottiene

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\arctan h)}{\sqrt[3]{h^3+h}}=\frac{3}{2}\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^3+h}}{(1+h^2)(3h^2+1)}=0.$$

Quindi f è derivabile in 0 e si ha $f'(x)=0$.

3. Risolvere nel campo complesso l'equazione $\left(\frac{z}{i-\sqrt{2}}\right)^2=4i$.

L'equazione equivale alla seguente $z=2\left(i-\sqrt{2}\right)\sqrt{i}$ **.** *Poiché*

$$\sqrt{i}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right),\quad k=0,1$$

si ottengono le due soluzioni $z_1=\left(\sqrt{2}+2\right)-i\left(\sqrt{2}-2\right)$ *e* $z_2=-\left(\sqrt{2}+2\right)+i\left(\sqrt{2}-2\right)$**.**

4. Stabilire il dominio di $f(x)=\int_0^x\frac{1}{|t-2|+|t+1|}dt$. Quindi calcolare il valore $f(-2)$.

Poiché $\frac{1}{|t-2|+|t+1|}$ *è definita e continua su tutto l'asse reale, la funzione integrale è definita in* **R**. *Inoltre si ha*

$$\frac{1}{|t-2|+|t+1|} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-2t} & \text{se } t < -1 \\ \dfrac{1}{3} & \text{se } -1 \le x < 2 \\ \dfrac{1}{2t-1} & \text{se } t \ge 2 \end{cases}$$

da cui segue

$$f(-2) = \int_0^{-2} \frac{1}{|t-2|+|t+1|}\,dt = \int_0^{-1} \frac{1}{3}\,dt + \int_{-1}^{-2} \frac{1}{1-2t}\,dt = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\log\frac{5}{3}.$$