1. Studiare l'insieme di convergenza puntuale ed uniforme della serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x)^k}{\ln(k+3)+\ln(k+1)}$.

E' una serie di potenze con coefficienti $a_k = \frac{1}{\ln(k+3)+\ln(k+1)}$.

Il raggio di convergenza R è dato dal limite

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(k+4)+\ln(k+2)}{\ln(k+3)+\ln(k+1)} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Utilizzando la regola di de l'Hospital si ha

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+4}+\frac{1}{k+2}}{\frac{1}{k+3}+\frac{1}{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+3}{k+2} \frac{k^2+4k+3}{k^2+6k+8} = 1$$

L'intervallo di convergenza puntuale è quindi $(-1,1)$.

Nell'estremo $x=-1$ *si ottiene un serie numerica a termini di segno alterno* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(k+3)+\ln(k+1)}$ *con la successione dei coefficienti* $a_k = \frac{1}{\ln(k+3)+\ln(k+1)}$ *decrescente e infinitesima; quindi si ha convergenza puntuale per il criterio di Leibniz.*

Nell'estremo $x=1$ *si ottiene una serie numerica a termini positivi* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k+3)+\ln(k+1)}$. *Risulta*

$$\frac{1}{\ln(k+3)+\ln(k+1)} \sim \frac{1}{2\ln k} > \frac{1}{2k}$$

Da cui segue la divergenza della serie per il criterio del confronto con la serie armonica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$.

Allora l'insieme di convergenza puntuale è l'intervallo $[-1,1)$, *mentre l'insieme di convergenza uniforme è l'intervallo* $[-1,1-\varepsilon]$, $\forall \varepsilon > 0$ *sufficientemente piccolo.*

2. Integrare il problema $\begin{cases} y'' = (y')^2 + 2y' + 1 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = -2 \end{cases}$ (Sugg.: utilizzare il cambiamento di variabile $z = y'$).

Posto $z = y'$, *l'eq. diff. diventa* $z' = z^2 + 2z + 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{z'}{(z+1)^2} = 1$.

Integrando entrambi i membri, si ottiene

$$\int \frac{dz}{(z+1)^2} = x + c_1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{z+1} = x + c_1 \quad \Rightarrow \quad z = -1 - \frac{1}{x + c_1} \quad \Rightarrow \quad y' = -1 - \frac{1}{x + c_1} .$$

Integrando di nuovo si ha

$$y = \int \left(-1 - \frac{1}{x + c_1} \right) dx \quad \Rightarrow \quad y = -x - \ln|x + c_1| + c_2 .$$

Dalle condizioni iniziali si ottiene

$$\begin{cases} -2 = -1 - \dfrac{1}{1 + c_1} \\ 1 = -1 - \ln|1| + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 2 \end{cases},$$

per cui, la soluzione del problema di Cauchy è $y = -x - \ln|x| + 2$

3. Calcolare $\displaystyle\iint_A \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy$, dove $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \ge 1, 0 \le x \le 1, -1 \le y \le -x \right\}$.

Conviene passare a coordinate polari $\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$ *con* $(\vartheta, \rho) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{4} \right] \times \left[1, -\dfrac{1}{\sin \vartheta} \right]$. *Allora si ha*

$$\iint_A \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy = \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \cos \vartheta d\vartheta \int_1^{-1/\sin\vartheta} \rho d\rho = \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \cos \vartheta d\vartheta \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_1^{-1/\sin\vartheta} = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} d\vartheta - \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \cos \vartheta d\vartheta =$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \sin^{-2} \vartheta d(\sin \vartheta) - \frac{1}{2} \sin \vartheta \Big|_{-\pi/2}^{-\pi/4} = -\frac{1}{2} \sin^{-1} \vartheta \Big|_{-\pi/2}^{-\pi/4} - \frac{1}{2} \left(\sin\left(-\frac{\pi}{4} \right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) =$$

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin\left(-\frac{\pi}{4} \right)} - \frac{1}{\sin\left(-\frac{\pi}{2} \right)} \right) - \frac{1}{2} \left(\sin\left(-\frac{\pi}{4} \right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{(-1)} \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) = \frac{3}{4} \sqrt{2} - 1.$$

4. Calcolare $L^{-1}\left[\dfrac{s}{(s+1)^4}\right]$.

$$\frac{s}{(s+1)^4} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)^3} + \frac{D}{(s+1)^4}.$$

$$A(s+1)^3 + B(s+1)^2 + C(s+1) + D = s.$$

$$As^3 + 3As^2 + 3As + A + Bs^2 + B + 2Bs + Cs + D = s.$$

$$\begin{cases} A = 0 \\ 3A + B = 0 \\ 3A + 2B + C = 1 \\ A + B + D = 0 \end{cases},$$

$A = 0$, $B = 0$, $C = 1$, $D = -1$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)^4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)^3} + \frac{D}{(s+1)^4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^3} - \frac{1}{(s+1)^4}\right] = \frac{1}{2}\, e^{-t}\cdot t^2 - \frac{1}{6} e^{-t}\cdot t^3.$$

1. Studiare l'insieme di convergenza puntuale ed uniforme della serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x)^k}{3k+\ln k}$.

E' una serie di potenze con coefficienti $a_k=\frac{1}{3k+\ln k}$.

Il raggio di convergenza R è dato dal limite

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{3k+3+\ln(k+1)}{3k+\ln k}=\frac{\infty}{\infty}.$$

Utilizzando la regola di de l'Hospital si ha

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{3+\frac{1}{k+1}}{3+\frac{1}{k}}=1$$

L'intervallo di convergenza puntuale è quindi $(-1,1)$.

Nell'estremo $x=-1$ *si ottiene un serie numerica a termini di segno alterno* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+\ln k}$ *con la successione dei coefficienti* $a_k=\frac{1}{3k+\ln k}$ *decrescente e infinitesima; quindi si ha convergenza puntuale per il criterio di Leibniz.*

Nell'estremo $x=1$ *si ottiene una serie numerica a termini positivi* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3k+\ln k}$. *Risulta*

$$\frac{1}{3k+\ln k}\sim\frac{1}{3k}$$

Da cui segue la divergenza della serie per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3k}$.

Allora l'insieme di convergenza puntuale è l'intervallo $[-1,1)$, *mentre l'insieme di convergenza uniforme è l'intervallo* $[-1,1-\varepsilon]$, $\forall\varepsilon>0$ *sufficientemente piccolo.*

2. Integrare il problema $\begin{cases} y'' = 4(y')^2 - 4y' + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ (Sugg.: utilizzare il cambiamento di variabile $z = y'$).

Posto $z = y'$, *l'eq. diff. diventa* $z' = 4z^2 - 4z + 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{z'}{(2z-1)^2} = 1$.

Integrando entrambi i membri, si ottiene

$$\int \frac{dz}{(2z-1)^2} = x + c_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2z-1} = -2(x+c_1) \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{2} - \frac{1}{4(x+c_1)}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{4(x+c_1)} .$$

Integrando di nuovo si ha

$$y = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4(x+c_1)} \right) dx \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\ln|x+c_1| + c_2 .$$

Dalle condizioni iniziali si ottiene

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4c_1} \\ 0 = -\dfrac{1}{4}\ln|c_1| + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{2} \\ c_2 = -\dfrac{1}{4}\ln 2 \end{cases},$$

per cui, la soluzione del problema di Cauchy è $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\ln\left|x + \dfrac{1}{2}\right| - \dfrac{1}{4}\ln 2$

3. Calcolare $\displaystyle\iint_A \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$, dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq 0\}$.

Conviene passare a coordinate polari $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$ *con* $(\vartheta, \rho) \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 0\right] \times \left[1, \dfrac{1}{\cos\vartheta}\right]$. *Allora si ha*

$$\iint_A \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \int_{-\pi/4}^{0} \cos\vartheta\, d\vartheta \int_1^{1/\cos\vartheta} \rho\, d\rho = \int_{-\pi/4}^{0} \cos\vartheta\, d\vartheta \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_1^{1/\cos\vartheta} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{0} \frac{\cos\vartheta}{\cos^2\vartheta}\, d\vartheta - \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{0} \cos\vartheta\, d\vartheta =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{0} \frac{d\vartheta}{\cos\vartheta} - \frac{1}{2}\sin\vartheta\Big|_{-\pi/4}^{0} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{0} \frac{d\vartheta}{\cos\vartheta} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

2. Calcolare $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2-2}{s(s^2-4)}\right]$.

$$\frac{s^2-2}{s(s^2-4)} = \frac{s}{(s-2)(s+2)} - \frac{2}{s(s-2)(s+2)} .$$

$$\frac{s}{(s-2)(s+2)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+2},\ (A+B)s + 2A - 2B = s,$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A - 2B = 0 \end{cases},\ A = B = \frac{1}{2} .$$

$$\frac{s}{(s-2)(s+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+2}\right).$$

$$\frac{2}{s(s-2)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+2},\ A(s^2-4) + B(s^2+2s) + C(s^2-2s) = 2.$$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 2B - 2C = 0 \\ -4A = 2 \end{cases},\ \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B + C = \frac{1}{2} \\ B = C \end{cases},\ A = -\frac{1}{2},\ B = C = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{2}{s(s-2)(s+2)} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{s-2} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{s+2}.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2-2}{s(s^2-4)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+2}\right)\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{2}\,\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{s-2} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{s+2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{-2t}.$$