

Analisi Matematica II

Appello 21 febbraio 2024

Nome e Cognome.....Firma.....

Esame di Geometria sostenuto	No			
	Si	a.a.	voto	docente

1. Integrare su $x > 0$, $x^2 y' + (3x + 1)y = 0$; trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(1) = 3$.

Posto $L[y] = y' + \frac{3x+1}{x^2} y$, determinare una soluzione particolare $\bar{y}(x) = Ax^2(x + 1)$ dell'equazione differenziale non omogenea $L[y] = x^2 + x + \frac{1}{6}$.

2. Calcolare l'integrale doppio $I = \iint_D \frac{y^2}{x^2 + y^2} dx dy$, dove
 $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: [(x^2 + y^2) \geq 1] \wedge [0 \leq y \leq x] \wedge [0 \leq x \leq 2]\}$.

3. Si determini l'insieme di convergenza e la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-5}\right)^n$.

4. Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri ed eventualmente calcolarli

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x} \cdot (2x+1)} dx \quad \text{e} \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(\sqrt{2x}-1)} dx .$$

Soluzioni.

1) Integrare su $x > 0$, $x^2 y' + (3x + 1)y = 0$; trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(1) = 3$.

Posto $L[y] = y' + \frac{3x+1}{x^2} y$, determinare una soluzione particolare $\bar{y}(x) = Ax^2(x + 1)$ dell'equazione differenziale non omogenea $L[y] = x^2 + x + \frac{1}{6}$.

L'equazione $y' + \frac{3x+1}{x^2} y = 0$ ha la soluzione nulla, che chiaramente non soddisfa la condizione iniziale.

Posto $A(x) = \int \frac{3x+1}{x^2} dx = \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx = 3 \log |x| - \frac{1}{x}$, si considera il fattore integrante

$e^{A(x)} = e^{3 \log |x| - \frac{1}{x}} = |x|^3 e^{-\frac{1}{x}} = x^3 e^{-\frac{1}{x}}$. Si moltiplicano entrambi i membri di $y' + \frac{3x+1}{x^2} y = 0$ per $e^{A(x)}$, ottenendo: $x^3 e^{-\frac{1}{x}} \left(y' + \frac{3x+1}{x^2} y \right) = 0$.

Da cui $D \left[y \cdot x^3 e^{-\frac{1}{x}} \right] = 0$, $y \cdot x^3 e^{-\frac{1}{x}} = c$.

La soluzione di $L[y] = 0$ è $y = \frac{c e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$.

La soluzione che soddisfa la condizione iniziale si ricava da $3 = \frac{c e}{1} : c = \frac{3}{e}$, $y = \frac{3 e^{\frac{1}{x}}}{e x^3}$.

Se $\bar{y}(x) = Ax^2(x + 1)$ è una soluzione particolare della (2), poiché

$\bar{y}'(x) = 2Ax(x + 1) + Ax^2 = 3Ax^2 + 2Ax$, deve risultare:

$$3Ax^2 + 2Ax + \frac{3x+1}{x^2} (Ax^2(x + 1)) = x^2 + x + \frac{1}{6}.$$

Ovvero $3Ax^2 + 2Ax + A(3x + 1)(x + 1) = 3Ax^2 + 2Ax + 3Ax^2 + 3Ax + Ax + A = x^2 + x + \frac{1}{6}$.

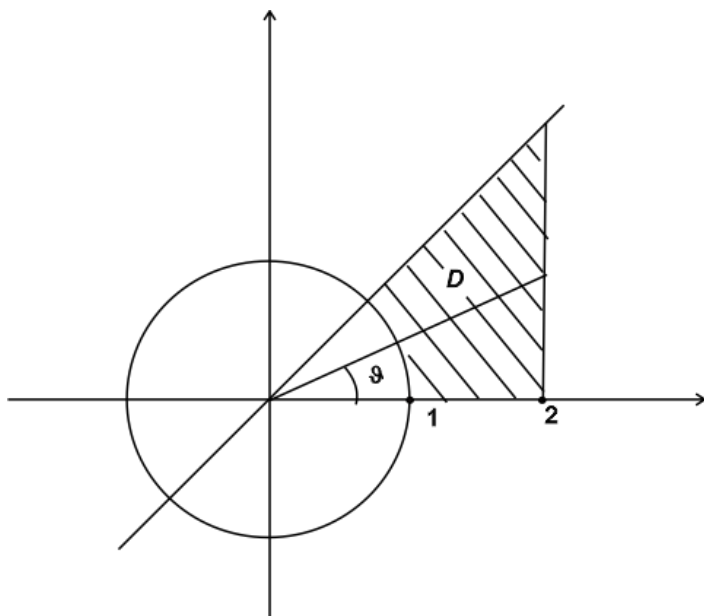
$$6Ax^2 + 6Ax + A = x^2 + x + \frac{1}{6}.$$

Quindi $A = \frac{1}{6}$. La soluzione particolare di $L[y] = x^2 + x + \frac{1}{6}$, del tipo $\bar{y}(x) = Ax^2(x + 1)$, è allora $\bar{y}(x) = \frac{1}{6}x^2(x + 1)$. La soluzione generale di $L[y] = x^2 + x + \frac{1}{6}$ è data da

$$y = \frac{3 e^{\frac{1}{x}}}{e x^3} + \frac{1}{6}x^2(x + 1).$$

2) Calcolare l'integrale doppio $I = \iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2} dx dy$, dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2: [(x^2 + y^2) \geq 1] \wedge [0 \leq y \leq x] \wedge [0 \leq x \leq 2]\}.$$



Conviene passare a coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}.$$

Poichè $0 \leq y \leq x$, risulta $\rho \sin \vartheta \leq \rho \cos \vartheta$, $\tan \vartheta \leq 1$ e $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}$.

Per un valore generico di ϑ , $2 = \rho \cos \vartheta$, quindi $1 \leq \rho \leq \frac{2}{\cos \vartheta}$.

$$I = \int_0^{\pi/4} d\vartheta \int_1^{2/\cos \vartheta} \frac{\rho^2 \sin^2 \vartheta}{\rho^2 \sin^2 \vartheta + \rho^2 \cos^2 \vartheta} \rho d\rho = \int_0^{\pi/4} d\vartheta \int_1^{2/\cos \vartheta} \sin^2 \vartheta \rho d\rho =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sin^2 \vartheta d\vartheta \left\{ \frac{\rho^2}{2} \right\}_{\frac{2}{\cos \vartheta}}^1 = \int_0^{\pi/4} \sin^2 \vartheta \left(\frac{2}{\cos^2 \vartheta} - \frac{1}{2} \right) d\vartheta =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(2 \tan^2 \vartheta - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right) d\vartheta = 2 \int_0^{\pi/4} (\tan^2 \vartheta + 1 - 1) d\vartheta - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sin^2 \vartheta d\vartheta =$$

$$\{D[\tan \vartheta] = \frac{1}{\cos^2 \vartheta} = \tan^2 \vartheta + 1, \int (\tan^2 \vartheta + 1) d\vartheta = \tan \vartheta + c\}$$

$$= 2 \tan \vartheta \Big|_0^{\pi/4} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2} d\vartheta = 2 - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} \left(\sin \frac{\pi}{2} - 0 \right) = 2 + \frac{1}{8} - \frac{9\pi}{16} =$$

$$= \frac{17}{8} - \frac{9}{16} \pi.$$

3) Si determini l'insieme di convergenza e la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-5} \right)^n.$$

Posto $t = \frac{x+1}{x-5}$, si ottiene la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ che converge per $|t| < 1$. L'insieme di convergenza si ottiene da

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-5} < 1 \\ -1 < \frac{x+1}{x-5} \end{cases}.$$

L'intersezione tra le due condizioni ha come risultato $-1 < \frac{x+1}{x-5} < 1$.

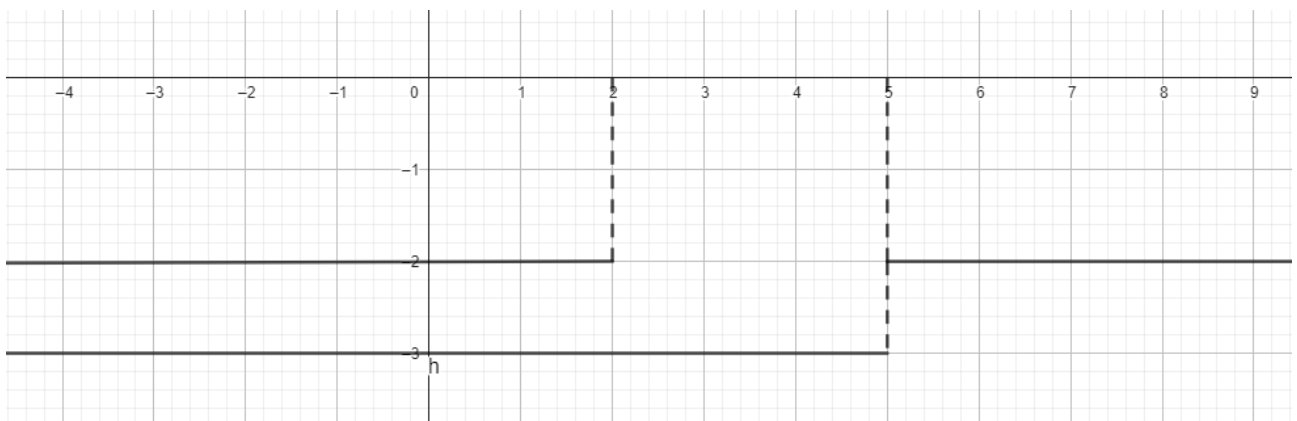
Consideriamo $\frac{(x+1)(x-5)}{(x-5)^2} < 1$.

$$\frac{(x+1)(x-5)}{(x-5)^2} < 1, -4x - 5 < -10x + 25, 6x < 30, x < 5.$$

Consideriamo ora $-1 < \frac{x+1}{x-5}$.

$$-1 < \frac{(x+1)(x-5)}{(x-5)^2}, -x^2 - 25 + 10x < x^2 - 5 - 4x, 2x^2 - 14x + 20 > 0, (x-5)(x-2) > 0.$$

Dev'essere $(x < 2) \cup (x > 5)$. Intersecando l'insieme $(x < 2) \cup (x > 5)$ con $x < 5$, si ottiene finalmente $x < 2$.



Ponendo $x = 2$, si ottiene $\frac{x+1}{x-5} = \frac{3}{-3} = -1$: la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ diverge. L'insieme di convergenza è

$(-\infty, 2)$. La somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-5} \right)^n$ è data da $\frac{1}{1-t} = \frac{1}{1-\frac{x+1}{x-5}} = \frac{5-x}{6}$.

4) Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri ed eventualmente calcolarli

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x} \cdot (2x+1)} dx \quad \text{e} \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(\sqrt{2x}-1)} dx .$$

a) Applichiamo il criterio del confronto asintotico: $\frac{1}{\sqrt{2x} \cdot (2x+1)} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ per $x \rightarrow \infty$ a meno di una costante; $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ converge per $x \rightarrow \infty$ e quindi converge $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x} \cdot (2x+1)} dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x} \cdot (2x+1)} dx = \{v = \sqrt{2x}, dv = \frac{1}{2\sqrt{2x}} dx = \frac{dx}{\sqrt{2x}}\} =$$

$$= \int \frac{dv}{v^2+1} = \arctan v + c = \arctan \sqrt{2x} + c.$$

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x} \cdot (2x+1)} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{2}}^t \frac{1}{\sqrt{2x} \cdot (2x+1)} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} [\arctan \sqrt{2x}] \Big|_{1/2}^t =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan \sqrt{2t} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

b) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(\sqrt{2x}-1)} dx$: è un integrale improprio di seconda specie, con $x = \frac{1}{2}$ punto singolare.

L'integrale diverge per $x \rightarrow \frac{1}{2}^+$. La funzione integranda infatti è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{x - \frac{1}{2}}$ per $x \rightarrow 1/2$ da destra. Infatti

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{2x}-1}}{\frac{1}{x-\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{2x}-1} = \{regola di L'Hopital\} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{\sqrt{2x}}} = 1.$$

Per il criterio del confronto asintotico l'integrale improprio assegnato diverge.