22 Marzo 2019.

**Equazioni a variabili separabili.**

Si dice a variabili separabili un’equazione differenziale del tipo *y’*= *f*(*x*) ∙*g*(*y*), con *f* e *g* funzioni continue in un intervallo *I*. Per determinare gli integrali dell’equazione, riscriviamola utilizzando la notazione di Leibniz.

, da cui, supponendo *g*(*y* )≠ 0, . Integrando, si ottiene una relazione del tipo

*G*(*y*) = *F*(*x*) + *c*,

che esprime in forma implicita il legame tra *y* e *x*.

a) 

L’insieme delle soluzioni è costituito dalla famiglia di iperboli equilatere *y*2 – *x*2 = *c*. Per *c* = 0, si hanno le soluzioni *y =*  ± *x*.

b) *y’*= 1 + *y*2, , arctan *y* =  *x* + *c*. Esplicitando la *y*, *y =* tg( *x + c*).

c) *y’ =* cos 2 *y.* Si ha la soluzione singolare *y = /2 + 2 k *. Per *y ≠ /2*

, tg *y* = *x + c*, da cui *y* = arctan (*x*+ *c*).

d) *x y’* = tg *y.*

Una soluzione è offerta da tg *y* =0, da cui *y = k π.* Supponendo *x ≠* 0 , *y ≠ k π* :

sen *y*=  *c* x*.*

e) *y’* tg *x* *= y*. Procedendo come nel caso c, si trova *y =* *c* sen *x*. La soluzione *y* =0 è un integrale singolare dell’equazione.

f)  Le funzioni *y =* 1 e *y = –*1sono integrali singolari.

Sia *y ≠* ± 1, *x ≠* 0.

 arcsen *y = x*2 + *c* *, y=*sen (*x*2 + *c*).

g) *y’ = e x –y* cos *x.*

 *ey* *dy = ex* cos *x dx.*

,





, .

h) Risolvere il seguente problema di Cauchy: 



Considerando la condizione iniziale, *y*(1) = 1, si considera l’equazione per *x* > 0. Si applica la funzione tangente, ottenendo *y =* tg (log *x* +*c*): *y*(1) = 1, tg *c =* 1, *c = * /4. Si conclude che



i) 

La funzione identicamente nulla *y* = 0 soddisfa l’equazione e il dato iniziale: pertanto è l’unica soluzione del problema dato.

l) *y’ = y* cotg *x*, *x ≠k π.*

La soluzione identicamente nulla è integrale singolare dell’equazione. Escludendo *y* =0,





m) *y’* = *y* (*y* –1) (*x*+1).

Due integrali singolari *y* = 0, *y* = 1.



*A*(*y –*1) +*By* = 1 →*A+B =* 0, *A* = –1, *B* =1.



n) 

o) 

p) 

q) .

r) 

s) (1 – *t*2) *y’* –*t y* – *ty*2 = 0.

**Equazioni differenziali lineari del secondo ordine.**

Lo studio delle equazioni differenziali di ordine *n* > 1 si presenta più complesso rispetto a quello relativo alle equazioni del primo ordine. Pur limitandoci al caso delle equazioni del secondo ordine, *F*(*x, y, y’, y’’*)= 0 ci troviamo di fronte a notevoli difficoltà: ad esempio, non esiste un metodo per risolvere l’equazione di Airy

*y’’ – x y =*0

nonostante che abbia una forma assai semplice. D’altra parte, nel caso delle equazioni lineari del secondo ordine,

*y’’ +P(x) y’ + Q(x) y = R(x)*

in alcuni casi particolari è agevole arrivare alla soluzione.

Consideriamo il caso più facile da trattare:

*y’’ = f(x)*

Si eseguono due integrazioni successive, ciascuna delle quali introduce una costante arbitraria. Eseguendo un prima integrazione, otteniamo

Integriamo di nuovo:

*y*(*x*) = .

Esempio 1. 

Poniamo *z = y’*, ottenendo  Interpretiamo questa equazione come un’equazione a variabili separabili:  Dunque

*z = y ’* = sinh (*x + c*1) e infine *y =* cosh (*x + c*1) + *c*2 = .

Sia *F*(*x,* y, *y’*, *y’’*) = 0 un’equazione differenziale . Una primitiva dell’equazione data è *f*(*x, y*,*c*1, *c*2)=0, se da quest’ultima si ottiene derivando due volte *F*(*x,* y, *y’*, *y’’*) = 0. L’integrale dell’equazione differenziale   
*F*(*x,* y, *y’*, *y’’*) = 0 è rappresentato da *f*(*x, y*,*c*1, *c*2)=0. Dall’integrale generale si ottengono gli integrali particolari imponendo le condizioni iniziali *y*0 = *y*(0), *y ’*0 = *y’* (0).

Nel caso delle equazioni differenziali del secondo ordine vale il *teorema di esistenza e unicità*:   
- sia *y’’ = f*(*x, y, y’*) un’equazione differenziale del secondo ordine in forma normale; posto *y’ = z*, risultino funzioni continue nelle variabili *x, y, z* le funzioni *f*(*x, y, z*), in una certa regione *R* del sistema di riferimento *Oxyz*, contenete il punto (*x*0, *y*0, *y ’*0).

Nelle ipotesi date in un certo intervallo di *x*0 esiste una e una sola soluzione *y*(*x*) del problema a valori iniziali.

Non esporremo la dimostrazione di questo teorema.

Sia *y’’* + *y* = 0, *y*(0) = 3, *y’* (0) = 0. Dunque *f*(*x, y, y’*) = –*y* e (*x*0, *y*0, *y’*0) = (0, 3, 0). Le ipotesi del precedente teorema sono soddisfatte. Si verifica anche che *y=* 3 cos *x* è una soluzione dell’equazione, che *y*(0) = 3 e che *y’* (0) = 0: la conclusione è che *y=* 3 cos *x* è l’unica soluzione del problema di Cauchy assegnato.

Per maggior chiarezza, enunciamo il teorema di esistenza e unicità nel caso particolare delle equazioni lineari:

-siano *P, Q*  e *R continue* su [*a,b*] e sia *x*0 un punto dell’intervallo *I =*[*a,b*].

Data l’equazione *y’’*(*x*) +*P*(*x*) *y’+ Q*(*x*) *y = R*(*x*) , Il problema ai valori iniziali ammette una e una sola soluzione nell’intervallo *I.*

Data l’equazione *y’’*(*x*) +*P*(*x*) *y’+ Q*(*x*) *y = R*(*x*), si passa all’equazione omogenea associata ponendo *R*(*x*)=0, ottenendo

(o) *y’’*(*x*) +*P*(*x*) *y’+ Q*(*x*) *y =*0.

Non esistono artifici che permettano di risolvere in generale quest’equazione mediante una o più integrazioni eseguite sui coefficienti *P*(*x*)*, Q* (*x*) e *R* (*x*).

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Stabiliamo alcuni risultati relativi alle equazioni differenziali lineari del secondo ordine che però valgono anche per equazioni differenziali lineari di qualunque ordine. Indichiamo con *L* la trasformazione che a ogni funzione *y* : *I→* ***R***  due volte derivabile associa *y’’*(*x*) +*P*(*x*) *y’+ Q*(*x*) *y*:

*L*(*y*) = *y’’*(*x*) +*P*(*x*) *y’+ Q*(*x*)*y*

La trasformazione *L* è lineare:   
*L*(*c 1y1 + c2 y2*) = *c 1* *y’’1*(*x*) + *P*(*x*) *c 1* *y1’+ Q*(*x*) *c 1y1 + c 2* *y’’2*(*x*) + *P*(*x*) *c 2* *y2’+ Q*(*x*) *c 2y2* =

= *c 1* *L*(*y1* ) *+ c2 L* (*y2*), quali che siano le funzioni *y1* e *y2* e le costanti *c 1* e *c2*.

L’equazione omogenea si riscrive *L*(*y*) = 0.

**Proposizione 1.** Se *y1* e  *y2* sono soluzioni di *L*(*y*) = 0 ogni loro combinazione lineare , ovvero ogni funzione

*x → c*1 *y*1(*x*)*+c*2 *y*2(*x*), è ancora una soluzione della stessa equazione.

Infatti: *L*(*c 1y1 + c2 y2*) = *c 1* *L*(*y1* ) *+ c2 L* (*y2*) = *c 1* ∙ 0 + *c 2* ∙ 0 = 0.

**Proposizione 2.** Se è soluzione dell’equazione non omogenea *y’’*(*x*) +*P*(*x*) *y’+ Q*(*x*) *y =* *R*(*x*) e *y* è soluzione dell’equazione omogena associata allora *y +* è soluzione di *y’’*(*x*) +*P*(*x*) *y’+ Q*(*x*) *y =* *R*(*x*).

Ovvio: *L*( + *y*) = *L* ( ) + *L*(*y*) = *R*(*x*) + 0 = *R*(*x*).

**Proposizione 3.** Se 1 e 2  sono soluzioni dell’equazione non omogenea, allora 1 – 2  è soluzione di   
*L*(*y*) = 0.

Infatti *L*( 1 – 2 ) = *L*( 1 ) – *L*( 2) = *R*(*x*)– *R*(*x*) = 0.

**Definizione di lineare indipendenza di una coppia di funzioni.**

Siano *y1* e  *y2* due funzioni definite sull’intervallo *I*, ciascuna delle quali distinta dalla funzione identicamente nulla. Ci chiediamo se è possibile che la funzione *x → c*1 *y*1(*x*)*+c*2 *y*2(*x*) sia identicamente nulla. Naturalmente se scegliamo *c 1* e *c2* entrambe uguali a zero la combinazione lineare *c*1 *y*1(*x*)*+c*2 *y*2(*x*) coincide con la funzione identicamente nulla e in certi casi questo è l’unico modo di ottenere tale funzione. In altri casi è possibile ottenere la funzione identicamente nulla anche con costanti *c 1* e *c2* non nulle.

Siano *y1* e  *y2* due funzioni definite sull’intervallo *I* della retta reale. Si dirà che esse sono linearmente indipendenti se dall’identità *c*1 *y*1(*x*)*+c*2 *y*2(*x*) = 0, ∀ *x* ∈ *I*, segue necessariamente *c 1* = *c2* = 0.

In termini equivalenti: le funzioni *y1* e  *y2* sono linearmente dipendenti se esistono due costanti *c 1* e *c2* non entrambe nulle per le quali risulta *c*1 *y*1(*x*)*+c*2 *y*2(*x*) = 0, ∀ *x* ∈ *I*. Se ciò accade e se *c*1 ≠ 0, allora

o anche

**Esempi.**

a) *y1* = *x* e *y2* = 2 *x* sono linearmente dipendenti: 2 *y1* – *y2* = 0.

*b*) *y1* = sen *x* e *y2* = cos *x*  sono linearmente indipendenti perché il loro rapporto è tg *x* che non è una costante.

c) *y1* = *e 1 x* e *y2* = *e2x* sono linearmente indipendenti, perché non è costante, se 1 ≠2 .